A Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT) és a Gyors Fourier Transzformáció (FFT)

2010. november 2.

1 DFT számításigénye

Adott egy $x[n]$ – $(n = 0 \dots N-1)$ – időtartománybeli jel, amely elemei lehetnek komplexek is. Az $x(n)$ elemek diszkrét Fourier transzformáltja a jól ismert DFT képlet alapján számítható:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad k = 0...N-1. \tag{1.1}$$

Egy $X[k]$ érték kiszámításához N darab komplex szorzás és $N-1$ komplex összeadás elvégzésére van szükség, ebből következik, hogy a teljes Fourier transzformált vektor kiszámítása $N(N-1)$ darab komplex összeadásból és N^2 darab komplex szorzásból áll.

Komplex aritmetika valós számításigénye
Vegyünk két komplex számot x_1-t és x_2-t:

$$x_1 = \quad a + jb \tag{1.2}$$

$$x_2 = \quad c + jd \tag{1.3}$$

- **Összeadás:**
  Ezen két komplex szám összegzésekor a valós és képzetes részek adódnak össze:
  $$x_1 + x_2 = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(d + b). \tag{1.4}$$
  Így egy komplex összeadást el lehet végezni két való összeadás művelettel.

- **Szorzás:**
  A komplex szorzás művelete már egy kicsit bonyolultabb, de ez is elvégezhető valós szorzásokkal és összeadásokkal:
  $$x_1 x_2 = (a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc) \tag{1.5}$$
  Jól látható, hogy egy komplex szorzáshoz 4 valós szorzás és 2 valós összeadásra van szükségünk.

- **Teljes számításigény:**
  Ebből következik, hogy egy DFT kiszámításához összesen $2N(N-1) + 2N^2$ valós összeadásra és $4N^2$ valós szorzásra van szükség.

- **Szorzás módositása:** Ügyes átalakításokkal a komplex szorzás megvalósítható 3 valós szorzás és 5 összeadás segítségével, vagyis egy szorzás elcserélhető 3 összeadásra. Ehhez a következő segédváltozókat kell definiálnunk:

$$U = a(c-d) \tag{1.6}$$

$$V = d(a-b) \tag{1.7}$$

$$W = c(a+b) \tag{1.8}$$

  A segédváltozók alkalmazásával a komplex szorzás felírható, mint

$$x_1 x_2 = (U+V) + j(W-U) = (ac-bd) + j(ad+bc). \tag{1.9}$$

  A segédváltozók kiszámításához 3 összeadást és 3 szorzást használtunk, majd a komplex szorzás elvégzéséhez 2 összeadást, így összesen 3 szorzással és 5 összeadással megvalósítottuk a komplex szorzás műveletét.

2 A FFT levezetés a DFT-ből

Vegyük ismét az (1.1) egyenletet és alakítsuk át:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \qquad k = 0...N-1, \tag{2.1}$$

ahol $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$. Végezzük el a következő átalakításokat n és k változókra:

$$n = \quad 2n_1 + n_2, \qquad n_1 = 0 \dots \tfrac{N}{2} - 1, \qquad n_2 = 0, 1 \tag{2.2}$$

$$k = \quad k_1 + \tfrac{N}{2}k_2, \qquad k_1 = 0 \dots \tfrac{N}{2} - 1, \qquad k_2 = 0, 1 \tag{2.3}$$

Most helyettesítsük vissza az (2.1) egyenletbe az n és k változók helyére:

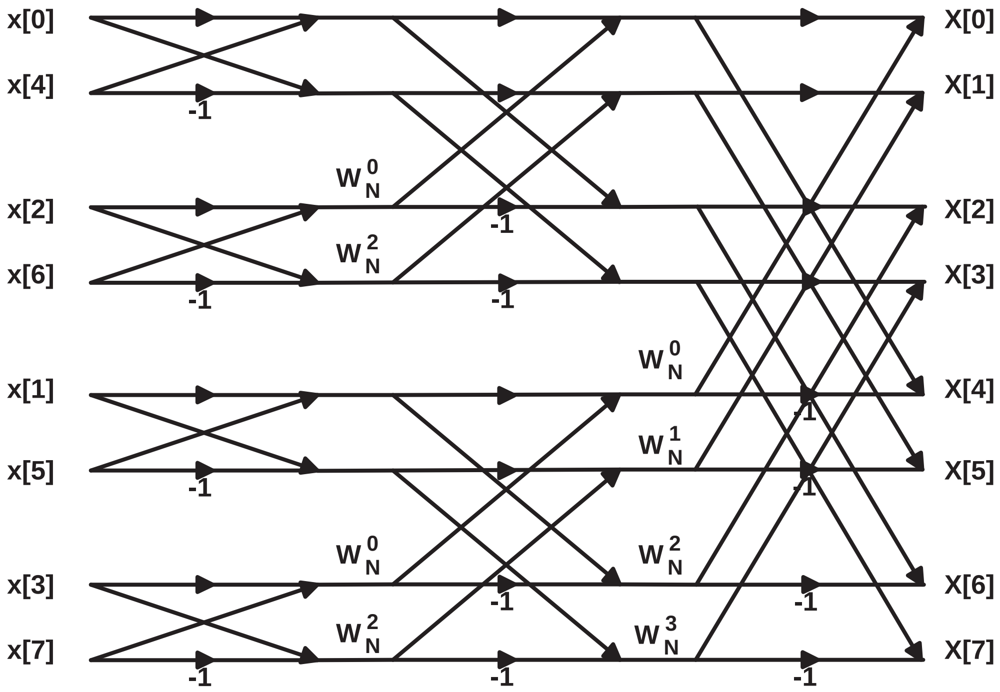
$$X[k_1 + \frac{N}{2}k_2] = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{n_2=0}^{1} x[2n_1 + n_2] W_N^{2n_1k_1 + Nn_1k_2 + n_2k_1 + \frac{N}{2}n_2k_2}, \tag{2.4}$$

ahol $k_1 = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$ és $k_2 = 0, 1$. Végezzük el az összegzést n_2 szerint:

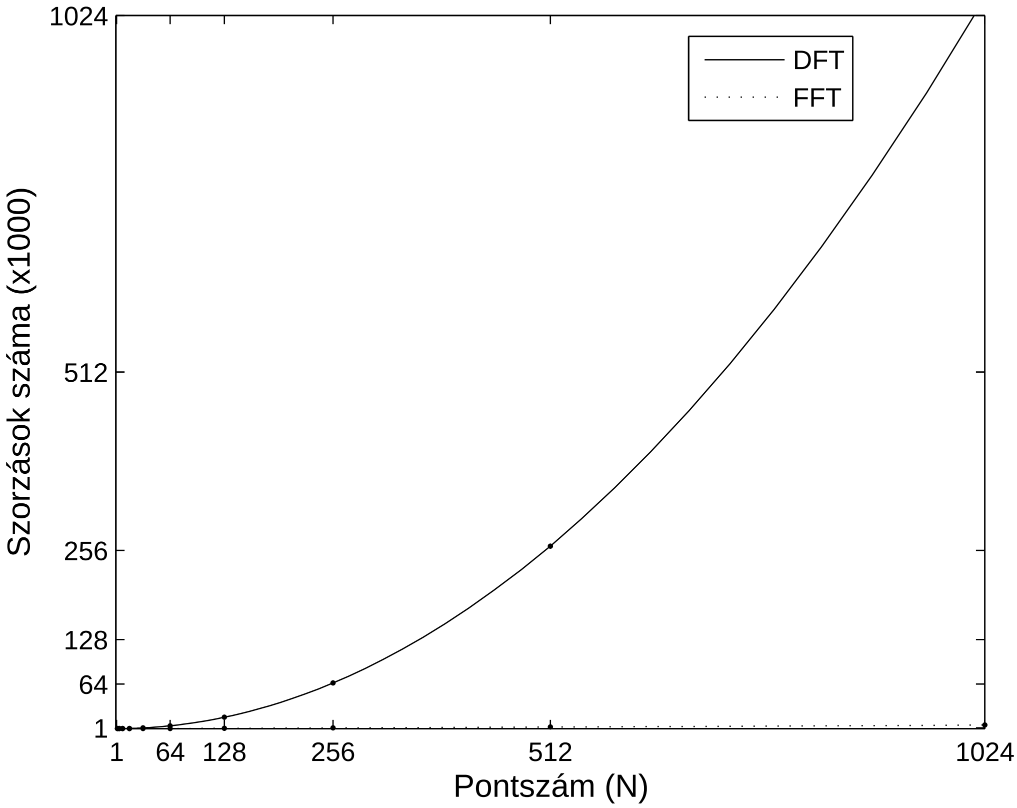
$$X[k_1 + \frac{N}{2}k_2] = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n_1] W_{\frac{N}{2}}^{n_1k_1} + W_N^{k_1 + \frac{N}{2}k_2} \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n_1 + 1] W_{\frac{N}{2}}^{n_1k_1}, \tag{2.5}$$

mivel $W_N^{2n} = W_{\frac{N}{2}}^{n}$ és $W_N^N = 1$. Az (2.5) képletben észrevehetjük, hogy az eredeti DFT-t felbontottuk két $\frac{N}{2}$ hosszúságú DFT-re – az egyik a páros, a másik pedig a páratlan tagokat tartalmazza –, amely közül a páratlan rész meg van szorozva még egy $W_N^{k_1 + \frac{N}{2}k_2}$ értékű komplex számmal. Észrevehetjük azt is, hogy $W_N^{k_1 + \frac{N}{2}k_2} = (-1)^{k_2} W_N^{k_1}$. Így az N pontos DFT kiszámítható 2 darab $\frac{N}{2}$ hosszúságú DFT és néhány extra művelet segítségével.

Egy 8 pontos DFT kiszámítása látható a 2.2 ábrán. Az ábrán jól látható, hogy szintenként N komplex összeadásra és N/2 komplex szorzásra van szükségünk. Valamint az is, hogy $\log_2 N$ szint van. Vagyis összesen $\frac{N}{2}\log_2 N$ komplex szorzásra valamint $N \log_2 N$ komplex összeadásra van szükség. Ebből adódik hogy az FFT valós számításigénye $2N \log_2 N$ valós szorzás és $3N \log_2 N$ valós összeadás. Néhány apró észrevétellel: pl. $W_N^0 = 1$ a számításigény tovább csökkenthető, de már drasztikus nyereség nem érhető el. A DFT és az FFT számitásigénye látható az ábrán. Jól látható, hogy a magasabb pontszám esetén a DFT számitásigénye exponenciálisan növekszik az FFT számitásigényéhez képest.



2.1. ábra. 8 pontos FFT számítása pillangókkal



2.2. ábra. 8 pontos FFT számítása pillangókkal

3 IFFT számítás FFT alapján

Tekintsük először az IDFT képletét:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \tag{3.1}$$

majd képezzük mindkét oldal komplex konjugáltját, így megkapjuk a jól ismert DFT képletét egy apró különbséggel:

$$x[n]^* = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]^* e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \mathrm{FFT}\left(X[k]^*\right). \tag{3.2}$$

Ezek alapján felírhatjuk az időtartománybeli $x[n]$ sorozatot a frekvenciatartománybeli $X[k]$ jel és az FFT segítségével a következőképpen:

$$x[n] = \mathrm{IFFT}\left(X[k]\right) = \mathrm{FFT}\left(X[k]^*\right)^* \tag{3.3}$$