

# ÖSSZEÁLLÍTÁS

a mérési bizonytalanság meghatározásának új megközelítéséről.

1993.

*Összeállította:* dr. Pataki Péter

## Ö S S Z E Á L L Í T Á S

a mérési bizonytalanság meghatározásának új megközelítéséről.

Összeállította: dr.Pataki Péter

---

A 70-es évek végén fogalmazódott meg az igény a mérési bizonytalanság értelmezésének, meghatározásának és megadási módjának egységesítésére, harmonizálására.

Egy, a BIPM által szervezett munkacsoport jelentését [1] 1981-ben ajánlás formájában megjelentette a CIPM [2]. Ezt az anyagot vette át 1986-ban az ISO/IEC és kiegészítések, fejlesztések és harmonizálások után 1992-ben az ISO, IEC -nemzetközi szabványügyi- és az OIML, BIPM -nemzetközi mérésügyi-szervezetek közösen megjelentették az "Útmutató a mérési bizonytalanság kifejezésére". című 91 oldalas "kézikönyvet". [3].

Az említett források az alapjai a különböző nemzetközi (pl. WECC [4]) és nemzeti(pl. NIST [5], NPL-NAMAS [6], PTB-DKD [7]) ajánlásoknak, útmutatóknak. Ezek az utóbbi években születtek, illetve születnek.

A rövid történeti áttekintésből és az említett kiadványok tartalmából kitűnik, hogy a mérési bizonytalanság meghatározásában egyrészt új szemlélet érvényesül. Másrészt ezen új megközelítés nemzetközi harmonizációja is megtörtént az elmúlt évtized során.

Jelen összeállítás célja bemutatni a mérési bizonytalanság meghatározásának új, egységesített módszereit és kitűzni a magyar mérésügy előtt álló feladatokat annak érdekében, hogy a nemzetközi gyakorlat hazai honosítása, elterjesztése megtörténhessen.

## A mérési bizonytalanság tulajdonságai és csoportosítása

A mérési bizonytalanság a mérés minőségjellemzője. Fogalmilag és tartalmilag is más mint a hagyományosan használt mérési hiba, mert a hiba számszerű megadása esetén is nyitva marad a kérdés, hogy az mennyire hihető, mennyire pontos.

Az új megközelítésben a mérési bizonytalanság olyan minőségjellemző amely:

- univerzális, vagyis minden mérési területen használható
- konzisztens, vagyis komponenseiből lezármaztatható
- átvihető, vagyis más mérésnél mint az egyik összetevő bizonytalansága számításba vehető
- konfidencia intervallumként funkcionál, vagyis meghatározható a hozzá tartozó konfidencia (bizalmi) szint.

A mérési bizonytalanságok csoportosítása meghatározási módszereik alapján történik. Két csoportot különböztetünk meg:

"A" típusú meghatározás: itt a bizonytalanságot az ismételt megfigyelésekkel szerzett információk (ugynevezett posteriori ismeretek) statisztikai feldolgozásával határozzuk meg.

"B" típusú meghatározás: ide tartozik minden más módszer. Ezek közös sajátossága, hogy a korábban megszerzett információk, a tapasztalat, (az un. a priori ismeretek) felhasználásával becsüljük meg a mérési bizonytalanságot.

Fontos hangsúlyozni, hogy az új megközelítés nem tesz különbséget a véletlen és rendszeres hibák között. Kerülendő a "véletlen" vagy "rendszeres bizonytalanság" kifejezések használata, mert ezek nem azonos kategóriák. (Pl. egy korrigált mérési eredmény végtelenül kis eltéréssel megközelítheti a tényleges értéket, vagyis a mérés hibája elhanyagolható, mégis a mérés bizonytalansága nagy lehet).

A fentieket egy példával lehet megvilágítani:

$x$  a mérendő mennyiség  $a$  offszettel torzított értéke. A mérési eredményekből a mérendő mennyiség becslőjét ( $y$ ) a korrigált mérési eredmények átlaga szolgáltatja:

$$y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - a$$

(Vagyis mindegy, hogy az egyes mérési eredményt vagy az átlagot korrigáljuk!)

9-ből viszont következik, hogy:

$$u_e^2(y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} u(x_i) \right)^2 + \left( -1 u(a) \right)^2 = \frac{u^2(x)}{n} + u^2(a)$$

Látható, hogy az eredő varianciában a korrekció varianciája teljes súllyal szerepel. Tehát nem elég a rendszeres hibával korrigálni, hanem a korrekciós tag varianciáját is meg kell határozni és az eredő bizonytalanság meghatározásánál számításba kell venni.

### A mérési bizonytalanság meghatározása

Az új megközelítésben a bizonytalanság számszerűsítésére a becsült szórást használjuk, amely a definíció szerint a becsült variancia négyzetgyöke. Ezt nevezzük standard bizonytalanságnak.

A bizonytalanság "A" típusú meghatározásánál kiszámítjuk az elvégzett mérési sorozat varianciabecslőjét ( $s_i^2$ ), illetve szórásbecslőjét ( $s_i$ ) és

ezt tekintjük a standard bizonytalanság számszerű értékének ( $u_i = s_i$ ).

A bizonytalanság "B" típusú meghatározásánál a mérési eredmény, mint valószínűségi változó eloszlására állítunk fel hipotézist (az un. a priori ismereteink alapján) és ezen feltételezett eloszlás szórása adja a standard bizonytalanság számszerű értékét ( $u_j$ ).

A bevezetőben említett forrásmunkákhoz hasonlóan részletes magyarázatokkal, illetve mintapéldákkal mutatjuk be az alkalmazható számítástechnikákat.

a./ A bizonytalanság "A" típusú meghatározása.

Az  $X_i$  mérendő mennyiség meghatározására  $n$  elemű mérési sorozatot végzünk.

A sorozat elemei rendre  $x_{i,1}; x_{i,2}; \dots; x_{i,k}; \dots; x_{i,n}$ .

A sorozat átlaga  $X_i$ -nek, mint valószínűségi változó várható értékének  $x_i$  becslője, vagyis:

$$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{i,k} \quad (1)$$

A sorozat tapasztalati varianciája:

$$s^2(x_{i,k}) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{X}_i)^2$$

Az  $x_i$  becslő varianciája, vagyis az átlag varianciája az ismert összefüggés szerint a sorozat varianciájának  $n$ -ed része:

$$s_i^2(\bar{X}_i) = \frac{s^2(x_{i,k})}{n} \quad (2)$$

Tehát a mérendő  $X_i$  várható értékének,  $\mu_{xi}$ -nek becslője (mérés eredménye):  $x_i = \bar{X}_i$ , a becslés (a mérés) standard bizonytalansága pedig:  $u_i = s_i$ .

b./ A bizonytalanság "B" típusú meghatározása.

Az  $X_i$  mérendő mennyiség várható értékének becslője az egy méréssel kapott  $x_i$  mérési eredmény. A becslés (a mérés) bizonytalanságát ( $u(x_i)$ ) az összes rendelkezésre álló információ felhasználásával határozhatjuk meg. Ezek -az úgynevezett a priori ismeretek- lehetnek korábbi mérések eredményei, általános ismeret a mérendő mennyiség viselkedéséről, gyári specifikációból vagy korábbi mérési bizonyítványból kivett adat, de lehet szaktudásunk alapján felállított hipotézis is.

Meg kell jegyezni, hogy a bizonytalanságnak ilyen, "B" típusú becslése sokszor lehet olyan hatásos mint a sorozatmérésen alapuló "A" típusú meghatározás. Jó példa erre az amikor egy normális eloszlásnak feltételezhető folyamat átlagának szórását akarjuk meghatározni sorozatméréssel. A véges számú  $n$  megfigyelés miatt az átlag ( $\bar{X}$ ) is valószínűségi változó  $\sigma(\bar{X})$  szórással. Ennek a  $\sigma(\bar{X})$  szórásnak a becslője a (2) alapján meghatározott  $s(\bar{X})$  tapasztalati szórás, vagyis a keresett mérési eredmény.

A becslő varianciájára igaz, hogy:

$$\sigma^2[s(\bar{X})] \approx \sigma^2(\bar{X})/2v$$

ahol  $v$  az úgynevezett szabadságfok, esetünkben ez :  $v = n-1$ .

Így tehát mérési eredményünk ( $s(\bar{X})$ ) eredő relatív bizonytalansága:

$$\frac{\sigma[s(\bar{X})]}{s(\bar{X})} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Ennek számszerű értéke n függvényében az 1.táblázatban látható:

| n  | $\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \cdot 100\%$ |
|----|---------------------------------------|
| 5  | 36%                                   |
| 10 | 24%                                   |
| 20 | 16%                                   |
| 30 | 13%                                   |
| 50 | 10%                                   |

1.táblázat

A táblázat adataiból következik, hogy 50-nél több megfigyelés szükséges ahhoz, hogy az átlag szórását 10%-nél kisebb relatív bizonytalansággal becsülhessük meg. Egy tapasztalt metrológus pedig egy megfelelő mérési összeállítással ezt lényegesen kevesebb megfigyelésből is meg tudná becsülni, kisebb bizonytalansággal.

A következőkben a teljesség igénye nélkül, számbavesszük a mérési bizonytalanság "B" típusú meghatározásának válfajait.

b.1./ Az  $x_i$  becsülő értéke és a becsülő bizonytalansága specifikációban adott. A specifikáció rögzíti a megadott bizonytalanság értelmezését is. Az adatokból a szórás illetve a variancia meghatározható.

Példa: Az *BIPM* bizonyítvány szerint az No.16. magyar tömegetalon hitelesített tömege:

$$m = 1000,000061 \text{ g}$$

a hitelesítés specifikált bizonytalansága:  $U(m) = 6,9 \mu\text{g}$ , háromszoros szórásnyi intervallum.

Ezek alapján a becsült standard bizonytalanság vagy szórás:

$$u(m) = \frac{6,9 \mu\text{g}}{3} = 2,3 \mu\text{g} = 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ g}$$

a relativ szórás:

$$\frac{u(m)}{m} = \frac{2,3 \cdot 10^{-6} \text{ g}}{10^3 \text{ g}} = 2,3 \cdot 10^{-9}$$

a variancia:

$$u^2(m) = 5,29 \cdot 10^{-12} \text{ g}^2$$

b.2./ Az  $x_1$  mért mennyiség (becslő) bizonytalanságát 90, 95 vagy 99%-os konfidenciaszinttel adják meg.

Mivel  $X_1$  eloszlása nincs jelezve feltételezhető, hogy az normális. (A centrális határeloszlás tétele értelmében ezen feltételezés az esetek jelentős részében jogos.) Normális eloszlásnál viszont az adott konfidencia szinthez tartozó konfidencia-intervallumból a szórás, vagyis a keresett standard bizonytalanság meghatározható a normális eloszlás nevezetes összefüggései alapján (1.:2.táblázat):

| Konfidencia szint<br>p (%) | Konfidencia intervallum<br>$\epsilon$ | Szorzófaktor<br>k |
|----------------------------|---------------------------------------|-------------------|
| 50                         | 0,68 $\sigma$                         | 0,68              |
| 68                         | $\sigma$                              | 1                 |
| 90                         | 1,64 $\sigma$                         | 1,64              |
| 95                         | 1,96 $\sigma$                         | 1,96              |
| 95,4                       | 2 $\sigma$                            | 2                 |
| 99                         | 2,58 $\sigma$                         | 2,58              |
| 99,7                       | 3 $\sigma$                            | 3                 |

2.táblázat

Példa: Normállenállás  $20^\circ\text{C}$ -on:  $R=10,000625\Omega$ , 99%-os konfidenciaszinthez tartozó specifikált bizonytalansága  $U(r)=129\mu\Omega$ .

A táblázat alapján a keresett standard bizonytalanság, a szórás:

$$u(r) = \frac{129 \mu\Omega}{2,58} = 50 \mu\Omega = 50 \cdot 10^{-6} \Omega$$

a relativ standard bizonytalanság:

$$\frac{u(r)}{R} = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{10} = 5 \cdot 10^{-6}$$



a variancia:

$$u^2(r) = 25 \cdot 10^{-12} \Omega^2$$

Példa: Egy alkatrész lényeges mérete 50%-os "valószínűséggel" 10,07 mm - 10,15 mm közé esik.

A méret becslője:

$$l = \frac{10,07 + 10,15}{2} = 10,11 \text{ mm}$$

Az 50%-os konfidenciaszinthez tartozó konfidencia-intervallum nagysága:

$$\epsilon_{50\%} = 0,04 \text{ mm}$$

A fentiekből következik a keresett standard bizonytalanság, a szórás:

$$u(l) = \frac{\epsilon}{k} = \frac{0,04 \text{ mm}}{0,68} = 0,06 \text{ mm}$$

és a variancia:

$$u^2(l) = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$$

---

\*\* bizonyítása: Legyen az egyenletes eloszlás  $x_i = 0$ -ra normált, ahol  $a = -a$ ,  $a = +a$ .

A variancia definíciója:  $\sigma^2(x) = \phi^2(x) - \mu^2(x)$ .

Ezek alapján:

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0$$

$$\phi^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-a}^a x^2 \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{a^2}{3}$$

tehát  $\sigma^2(x) = \frac{a^2}{3}$ ; amit bizonyítani akarunk.

---

( a 10. oldal lábjegyzete)

b.3./ Sokszor adják meg azt, hogy:

"  $X_i$  benne van az  $a_-$  és az  $a_+$  határokkal meghatározott intervallumban  $2/3$  valószínűséggel."

A részletes adatok hiánya miatt feltételezhetjük, hogy:

-az intervallum szimmetrikus:

$$a = \frac{a_+ - a_-}{2}$$

- $X_i$  eloszlása normális.

A keresett standard bizonytalanság, a szórás meghatározható:

$2/3 = 67\% \approx 68\%$  normális eloszlásnál ehhez  $k = 1$  tartozik, tehát:

$$u(x_i) = a$$

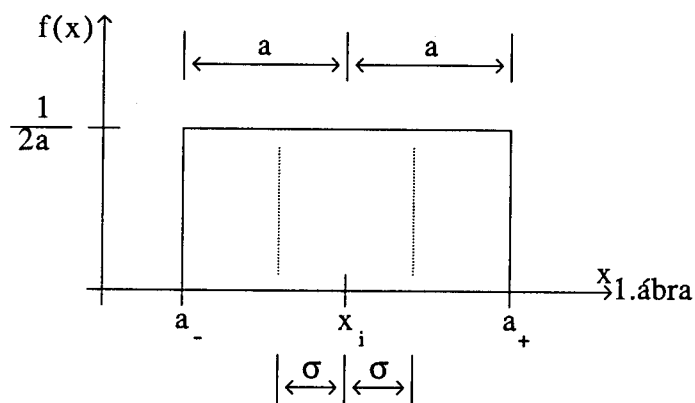
a variancia:

$$u^2(x_i) = a^2$$

b.4./ Máskor az állítás így hangzik:

" Annak valószínűsége, hogy  $X_i$  benne van az  $a_-$  - tól  $a_+$  - ig terjedő intervallumban gyakorlatilag 1."

Nem tudjuk, hogy ezen belül hová helyezkedik el  $X_i$ . Ha feltételezzük, hogy  $X_i$  az intervallumon belül bárhol előfordulhat azonos valószínűséggel, akkor  $X_i$  feltételezett eloszlása egyenletes.



$$\text{ahol } a = \frac{a_+ - a_-}{2}$$

$$x_i = \frac{a_+ + a_-}{2} \quad (3)$$

Az egyenletes eloszlás varianciája (l.:bizonyítás):

$$\sigma^2(x) = \frac{a^2}{3} \quad **$$

A fentiek alapján  $X_i$  becslője  $x_i$  (3) és a becslés standard bizonytalansága, szórása pedig:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{12}} \quad (4)$$

Példa: Egy digitális feszültségmérő műszerkönyvében szereplő specifikáció a következő:

" A kalibrálást követő második évben az 1V-os méréshatár bizonytalansága  $14 \times 10^{-6}$  a mért értékre és  $2 \times 10^{-6}$  a méréshatárra vonatkoztatva."

A kalibrálást követő 20. hónapban végrehajtott sorozatmérés átlaga (1) és "A" típusú meghatározással a bizonytalansága (2) a következő:

$$\bar{V} = 0.928571 \text{ V}$$

$$u(\bar{V}) = 12 \text{ } \mu\text{V}$$

A gyári specifikáció viszont arra utal, hogy a 20. hónapban már számítani lehet egy eltolódásra, amiről csak azt tudjuk, hogy szimmetrikus határok között, azonos valószínűséggel bárhol lehet. Vagyis eloszlása egyenletes. A szimmetrikus intervallumhatár a specifikáció alapján meghatározható:

$$a = (14 \cdot 10^{-6})(0,928571 \text{ V}) + (2 \cdot 10^{-6})(1 \text{ V}) = 15 \text{ } \mu\text{V}$$

(4) alapján  $\Delta \bar{V}$  eltolódás varianciája:

$$u^2(\Delta V) = \frac{a^2}{3} = 75 \mu V^2$$

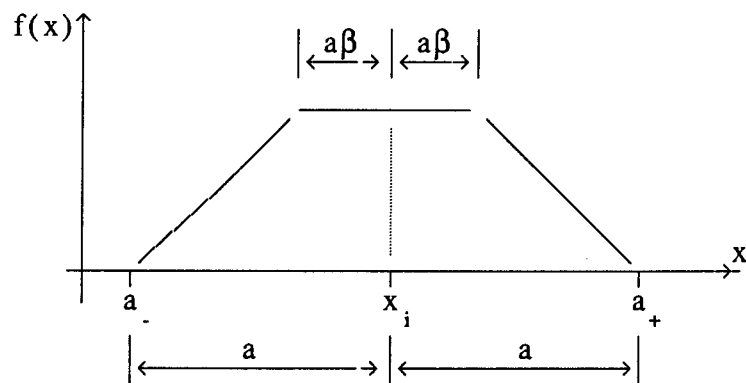
A mérés eredő varianciája az  $u^2(\bar{V})$  és  $u^2(\Delta V)$  varianciák összege. Tehát a mérendő mennyiség becslésének eredő bizonytalansága:

$$u(v) = + \sqrt{u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta V)} = 15 \mu V$$

b.5./ A b.4.pontban az volt a hipotézisünk, hogy az  $X_i$  mérendő mennyiség 100%-os valószínűséggel benne van az  $a_-$  és  $a_+$  határokkal megadott intervallumban. Az intervallumon belüli elhelyezkedésének valószínűségét viszont egyéb ismeret hiányában mindenhol azonosnak vettük. Ezért modelleztük  $X_i$  elosztását egyenletesnek.

Ismereteink, tapasztalataink alapján *tudjuk, hogy a fizikai valóságot jobban tükrözné olyan modell amely nagyobb valószínűséget ad az intervallum közepének mint a két szélének.*

Egy ilyen modell lehet a trapézeloszlás:



2.ábra

ahol  $a = \frac{a_+ - a_-}{2}$        $x_i = \frac{a_+ + a_-}{2}$        $0 \leq \beta \leq 1$

$\beta = 1$  : egyenletes eloszlás

$\beta = 0$  : háromszögeloszlás

A trapézeloszlású  $x_1$  becslő varianciája a b.4.pontban szereplő bizonyítás alapján levezethető:

$$u^2(x_1) = \frac{a^2 (1 + \beta^2)}{6} \quad (5)$$

$\beta = 0$  helyettesítéssel a háromszögeloszlás varianciája pedig:

$$u^2(x_1) = \frac{a^2}{6} \quad (6)$$

### Az eredő bizonytalanság meghatározása

Az eddigiekben a méréssel becsült egyes komponensek standard bizonytalanságainak meghatározásával foglalkoztunk. A mérendő mennyiséget ezen összetevők alapján számítással határozzuk meg ezért módszert kell találnunk arra, hogy az összetevők bizonytalanságaiból meghatározhassuk a mérendő mennyiség eredő bizonytalanságát.

Az összetevő, vagy bemeneti mennyiségek ( $X_1$ ) és a mérendő, vagy kimeneti mennyiség ( $Y$ ) kapcsolatát megadó függvény a fizikai törvényszerűségek alapján ismert és a következő írásmóddal szimbolizálható:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N) \quad (7)$$

(7) a mérési folyamat matematikai modellje.

A mérési folyamat során az  $X_i$  bemeneti mennyiségek becslőjét ( $x_i$ ) határozzuk meg. A becslők értékét (7)-be helyettesítve kapjuk a kimeneti (mérendő) mennyiség becslőjét,  $y$ -t:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N) \quad (8)$$

A becsült kimeneti mennyiség standard bizonytalanságát (8) Taylor-sorának elsőfokú tagjaival közelítjük:

$$u_e^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (9)$$

A (9) csak akkor igaz, ha az egyes bemeneti mennyiségek statisztikailag függetlenek, vagyis korrelálatlanok. Amennyiben a statisztikai függetlenség nem teljesül akkor a kimeneti mennyiség standard bizonytalanságának meghatározása a következő formula alapján lehetséges:

$$\begin{aligned} u_e^2(y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (10)$$

ahol  $u(x_i, x_j)$  az  $x_i, x_j$  becslők becsült kovarianciája. (10)-et a "standard bizonytalanságok terjedési törvényének" nevezzük. A statisztikai függőség számszerűsítésére a korrelációs együttható használható, amelynek definíciója:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) u(x_j)} \quad (11)$$

$$\text{ahol } -1 \leq r(x_i, x_j) \leq 1$$

(9)-ből következik, hogy a bemeneti mennyiségek statisztikai függetlensége, azaz  $r(x_i, x_j) = 0$  esetén a varianciák súlyozott összegének pozitív négyzetgyöke adja a kimenő mennyiség becslőjének standard bizonytalanságát. (10) és (11) -ből viszont levezethető, hogy teljesen korrelált bemenő mennyiségeknél, ahol  $r(x_i, x_j) = +1$ :

$$\begin{aligned}
u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i)u(x_j) = \\
&= \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) u(x_i) \right)^2
\end{aligned}$$

vagyis a *szórások súlyozott összege* adja a kimenő mennyiség becslőjének standard bizonytalanságát.

Ki kell emelni, hogy a mérési bizonytalanság meghatározásának új megközelítése szakított az úgynevezett "worst case", a "legkedvezőtlenebb hiba" becslésének módszereivel, mert azok nem vették figyelembe a bemenő mennyiségek esetleges statisztikai függőségét. Ezen elhanyagolás viszont az eredő bizonytalanság alá- vagy felébecslését eredményezte amely mind műszakilag, mind gazdaságilag káros.

A statisztikai függetlenség feltételezése a fizikai képpel is ellentétes. A korreláltság a mért bemeneti mennyiségeknél szinte mindig kimutatható. Hol azért, mert a különböző bemeneti mennyiségeket azonos műszerrel mérjük, hol azért mert a környezeti feltételek (pl. a hőmérséklet) több bemenő mennyiségre hatnak. Tehát kimondható, hogy a bemeneti becslők ( $x_i$ ), vagyis a mért mennyiségek korreláltságára még akkor is számítani kell, ha a becsült bemeneti mennyiségek ( $X_i$ ) egymással korrelálatlanok.

A kérdés csak az, hogy hogyan határozható meg két statisztikailag nem független mennyiség kovarianciája, vagy korrelációs együtthatója.

#### A kovariancia "A" típusú meghatározása:

$x_i$  és  $x_j$  korreláltságának megállapítására  $n$  elemű mérési sorozatokat végzünk. Az  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, \dots, x_{in}$  és  $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk}, \dots, x_{jn}$  sorozatokból a kovariancia becslője meghatározható:

$$s(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{X}_i) (x_{jk} - \bar{X}_j) \quad (12)$$

$$\text{ahol } \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ik}, \quad \bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{jk}$$

továbbá (2)-ből következik, hogy:

$$s^2(\bar{X}_i) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{X}_i)^2$$

$$s^2(\bar{X}_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{jk} - \bar{X}_j)^2$$

(11)-be helyettesítve kapjuk a korrelációs együtttható becslőjét:

$$r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \frac{s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)}{s(\bar{X}_i) s(\bar{X}_j)}$$

Tehát a párokban végzett sorozatméréssel  $\bar{X}_i$  és  $\bar{X}_j$  kovarianciabecslője meghatározható, mert ha  $x_i$  és  $x_j$  becslője  $\bar{X}_i$  és  $\bar{X}_j$ -nek, akkor a becslt kovarianciára írható, hogy:

$$u(x_i, x_j) = u(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$$

A kovariancia "B" típusú meghatározása:

Ez a korrelációs együtttható becslését jelenti egy, a korreláltság mértékére felállított hipotézis alapján. Ehhez nagy tapasztalat, sok-sok előzetes ismeret (a priori) szükséges, de jól tervezett ellenőrző mérésekkel a hipotézis helyessége ellenőrizhető illetve a kezdeti hipotézis finomítható.



A mérési folyamat matematikai modelljéből (7) következik, hogy az összes bemeneti mennyiség páronkénti korreláltságát vizsgálni kell. Az így meghatározott kovarianciák egy mátrixba rendezhetők. A kovariancia mátrix főátlójában lévő elemek az egyes varianciák, mert  $u_{ii}=u_i$ , míg a többi elem a kovarianciák, amelyek a főátlóra szimmetrikusak, mert  $u_{ij} = u_{ji}$ .

Az elmondottakból következik, hogy a mérendő mennyiség (Y) bizonytalanságának meghatározásához nem csak a fizikai valóságot tükröző matematikai modell (7) ismerete, hanem a bemenő mennyiségek bizonytalanságát és korreláltságát megadó kovariancia mátrix meghatározása is szükséges. Kimondható tehát, hogy míg a mérés "csak" technikát, addig a kiértékelés sok-sok szaktudást igényel.

## IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Report on the BIPM Enquire on Error Statements  
BIPM (1981), Rapoort BIPM-80/3
- [2] CIPM (1981), BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures 49;  
Giacomo, P. (1982), Metrologia 18.
- [3] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement  
ISO/TAG 4/WG 3: June 1992.
- [4] Guidelines for the Expression of the Uncertainty of Measurement in  
Calibration  
WECC Doc. 19-1990.
- [5] B.N.Taylor - C.E.Kuyatt: Guidelines for Evaluating and Expressing the  
Uncertainty of NIST Measurement Results  
NIST Technical Note 1297
- [6] NIS 3003 The expression of Uncertainty and Confidence of Measurements  
(with Particular Reference to Electrical Measurements) NPL-NAMAS 1991.
- [7] PTB-DKD-3 Deutscher Kalibrierdienst: Ermittlung von  
Messungssicherheiten. 1991.

## Mi a korszerű a mérési bizonytalanságok terén?

1. Egy mérési folyamat bizonytalansági listájának tartalmaznia kell az összes bizonytalansági forrást, a megfelelő varianciákat és a számítási vagy becslési módszereket!
2. Ne különböztess meg a rendszeres és véletlen hibákat, mert a korrekciós tag varianciáját nem hanyagolhatod el!
3. Csak a varianciákra koncentrálj, mert a "hibaterjedés törvénye" csak ezekre érvényes!
4. Kerüld a "worst-case" becslést, vagy a "feladatnak megfelel" állításokat, mert ezek a bizonytalanság alá - vagy felébecsléséhez egyaránt vezethetnek!