

7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra (folyt.)

Rekurzív jelreprezentáció:

- (1) soros-párhuzamos átalakító: az időtartományban értelmezhető N mintából, a N minta beérkezését követően előáll a párhuzamos csatornákon N adat, amely egyértelműen reprezentálja a N időtartománybeli mintát.
- (2) A számítást folytatva további N mintára ismét előáll a transzformált tartománybeli reprezentáció. Így folytatva, rendre az N mintából álló adatblokk egyértelmű reprezentációját kapjuk a blokkméretnek megfelelő mértékű mintavételi-frekvencia csökkentéssel (ún. decimációval.)
- (3) Az ilyen előállítás minden lépésben a legutolsó N minta transzformáltját adja, azaz csúszó-ablakos/rekurzív transzformációt valósít meg.

A megvalósított transzformációk a (202) szerint felépülő mátrixok, amelyek a rekurzív előállítás következtében interpretálhatók N csatornás szűrőkként, ahol a szűrők kimenete kétféleképpen képezhető:

- (a) A 45. ábrán látható diszkrét integrátor kimenete, amely folyamatosan a bázis-vektorok súlytényezőit becsli (Fourier esetben ezek a diszkrét „Fourier-sorfejtés/transzformáció” együtthatói),
- (b) A 45. ábrán látható, diszkrét integrátorok utáni keverők, ill. a 49. ábra szerinti diszkrét integrátorok kimenete, amely folyamatosan a feldolgozott jel komponenseit becsli (Fourier esetben ezek az ún. „Fourier komponensek”). Ezek a komponensek minden N periódus kezdetén megegyeznek a bázis-vektorok súlytényezőivel, vagyis az előző N minta diszkrét transzformáltjával.

A „jelcsatornák” párhuzamos kimeneteinek lineáris kombinációjával újabb transzformációk hozhatók létre. Azt, hogy ezzel a lehetőséggel élünk-e, leginkább aszerint határozzuk meg, hogy számítástechnikailag mi előnyösebb:

- (a) Elképzelhető, hogy a rekurzív Fourier transzformáció (F) eredménye mindenképpen kell, akkor egy általános transzformációt, különösképp, ha annak csak részhalma szükséges, az alábbi összefüggéssel számolunk:

$$x = Ty = V_1 F y, \quad (210)$$

ahol V_1 négyzetes mátrix.

- (b) Elképzelhető, hogy a transzformáció megválasztásának szempontja a hatékony kiszámíthatóság. Erre nagyon jó példa a Walsh transzformáció (W), amelynek bázis/reciprok bázis vektorai – a közös normáló tényezőtől eltekintve - csak +1 és -1 értékeket vesznek fel. Lásd az 50. ábra $N=8$ esetére. Ez a transzformáció adattömörítésre használható (ilyenkor a N időtartományi mintát M transzformált tartománybeli mintával reprezentáljuk) vagy a (210) összefüggéshez hasonlóan további transzformációk előállításánál használjuk:

$$x = Ty = V_2 W y, \quad (211)$$

ahol V_2 négyzetes mátrix.

- (c) Kimutatták, hogy a Fourier transzformáció előállítása a Walsh transzformáció közbeiktatásával $N=64$ pontig számítástechnikailag előnyösebb, mint közvetlenül:

$$x = F y = V_3 W y, \quad (212)$$

ahol V_3 négyzetes mátrix.

A rezonátor alapú rekurzív diszkrét Fourier transzformátor (RDFT):

Az eddigiek részbeni összefoglalásaként foglaljuk össze a rezonátor alapú rekurzív Fourier transzformátor jellemzőit. Az 51. ábra az egyes rezonátorokat, az 52. ábra pedig teljes struktúrát illusztrálja. Ez utóbbi egyes csatornáinak átviteli függvényét a (204), az összegzett átviteli függvényt pedig a (205) összefüggés írja le. Az egyes csatornák amplitúdó-karakterisztikája olyan, mint a csúszó ablakos átlagolóé, azzal az eltéréssel, hogy az átvitel éppen az m -edik frekvencia komponens helyén 1.

Az RDFT rezonátor alapú megvalósítása abban különbözik a diszkrét Fourier transzformációtól, hogy annak eredményét – miközben minden lépésben az előző N minta „valamilyen” transzformáltját adja – N lépésenként, azaz „blokkonként” kapjuk meg. A közbenső („valamilyen”) transzformált ugyancsak Fourier transzformálnak tekinthető azzal a különbséggel, hogy a bázisvektorok lépésről-lépésre más fázishelyzetűek.

Megjegyzés:

1. Csak páratlan harmonikus komponenst tartalmazó jelek esetén érdekes lehet a -1 egységgyökeire alapozott bázis/reciprok bázis készlet, ill. transzformáció. Ilyenkor az első bázisvektor egy félperiódusú komplex exponenciális, a második egy másfél periódusú, stb. Ilyenkor $H_p(z) = -z^{-N}$, azaz a N lépésnyi késleltetés mellett fázist is fordít.
2. Ha az 52. ábrán az $1/N$ tényező helyett α/N szerepel, ahol $0 < \alpha < 1$, akkor a csúszó ablakos transzformációt kombinálni tudjuk az exponenciális átlagolással. Ez azt jelenti, hogy az egymást követő, N hosszúságú blokkokat felejtő hatással, de átlagoljuk. Ilyenkor (205)

$$H_p(z) = \frac{\frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - z^{-N} + \alpha z^{-N}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - (1 - \alpha)z^{-N}} \quad (213)$$

formában írható, ami a mértani sor összegképletével

$$H_p(z) = \alpha z^{-N} + \alpha(1 - \alpha)z^{-2N} + \alpha(1 - \alpha)^2 z^{-3N} + \dots, \quad (214)$$

vagyis az egymástól N távolságra lévő mintákat egyre csökkenő súllyal vesszük az átlagolásnál figyelembe. (Lásd az 53. ábra, továbbá a (181)-(183) összefüggések.) Ugyanez a hatás az egyes csatorna kimenetek esetében a N hosszúságú blokkok alapján kiszámított komponens-minták exponenciális átlagolását eredményezi.

A rezonátor alapú megfigyelő, mint univerzális jelfeldolgozó eszköz:

Általánosítsuk a (203) összefüggést az alábbi módon:

$$H_m(z) = \frac{g_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \quad (215)$$

Írjuk fel ezzel a $H_p(z)$ átviteli függvényt:

$$H_p(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} \quad (216)$$

- (a) Ha véges impulzusválaszú (FIR) viselkedést akarunk biztosítani, akkor a (216) összefüggés nevezőjének az alábbi kötetést kell teljesíteni:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{1}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})}, \quad (217)$$

mert ebben az esetben lesz a (216) összefüggés z^{-1} polinomja, azaz véges impulzusválaszú. Ehhez a $\{g_m\}$ és az $\{r_m = g_m / z_m\}$ súlytényezőket

$$g_m = \frac{z_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; r_m = \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})} \quad (218)$$

alapján tudjuk meghatározni. FIR szűrőt a frekvencia-mintavételi eljárás szabályai szerint, az egyes csatornák kimeneteinek lineáris kombinációjaként valósítunk meg. Lásd (209) összefüggés.

Megjegyzés:

1. A rezonátor pólus pozíciók szabadon megválaszthatók (de legyenek különbözők).
 2. Ha a rezonátor pólus pozíciók az N -edik egységgyökök, akkor $r_m = 1/N$ minden m -re.
- (b) Ha végtelen impulzusválaszú (IIR) viselkedést akarunk, és adottak a megvalósítandó p_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$, akkor (217) és (218) megfelelője:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - p_n z^{-1})}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})} \quad (219)$$

$$g_m = z_m \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; r_m = \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})} \quad (220)$$

A szűrő kimenőjelét ebben az esetben is az egyes csatornák kimeneteinek lineáris kombinációjaként kapjuk.

Megjegyzés: A rekurzív jeltranszformátor, továbbá FIR és IIR szűrő megvalósítására egyaránt alkalmas rezonátor-alapú jelfeldolgozó struktúra fontos tulajdonságai:

- (a) A jelet komponensekre bontja, majd (szükség szerint) lineáris kombináció képzéssel szintetizálja.
- (b) A rezonancia frekvenciákon a hurokerősítés végtelen, ezért az átvitel paraméter-érzékenysége – a kimeneti lineáris kombináció súlytényezőit leszámítva – ezeken a frekvenciákon nulla, az átvitel pontosságát kizárólag ezek a súlytényezők befolyásolják.
- (c) A rezonátor pólus pozíciók szisztematikus megválasztásával stabilitási és numerikus szempontból egyaránt kedvező számítási elrendezéshez jutunk.

Kapcsolat a Lagrange interpolációs polinommal:

Adott $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ ún. alappontok felett egy függvény értékei: $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$, ... $y_{N-1} = y(x_{N-1})$. Az ezeken a pontokon "áthaladó" Lagrange interpolációs polinom

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a_m}{x - x_m}, \quad (221)$$

ahol

$$a_m = \frac{y_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (x_m - x_n)} \quad (222)$$

Az összefüggések egybevetésével látható, hogy a frekvencia-mintavételi eljárás (lásd (209) összefüggés) a Lagrange interpolációnak felel meg, és az is, hogy nem csak az N -edik egységgyökök esetében használható.

Megjegyzés:

- (a) Hermite interpoláció: (többszörös rezonátor pólusok esete). Ha az x_m alappontban egy függvényből $N_0(m)$ számú adat (érték, első derivált értéke, második derivált értéke, stb.) áll rendelkezésre, akkor az ún. Hermite interpolációs polinom

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n)^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} a_{mi} x^i}{(x - x_m)^{N_0(m)}}, \quad (223)$$

ill. a megfelelő digitális szűrő-készlet

$$H(z) = \prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} A_{mi} z^{-i}}{(1 - z_m z^{-1})^{N_0(m)}}, \quad (224)$$

amelynek közös zérusai, a Lagrange interpolációhoz hasonlóan előállíthatók a közös visszacsatolás segítségével. A különbség csak annyi, hogy a multiplicitásnak megfelelő számú rezonátor sorosan kapcsolódik.

A passzivitás feltétele rezonátor alapú megfigyelőknél (Ez nem szerepelt az előadáson, de előre szerepeltetem, hogy a zárthelyire készülést ezzel is segítsen.)

Kedvezőek azok a számítási eljárások, amelyek passzívnak tekinthetők. Ezek tipikusan - a struktúrájukból adódóan - a paramétereik értékétől függetlenül nem növelik a jelszintet egy bizonyos érték fölé. A rezonátoros struktúra esetében

$$H_p(z) = \frac{a + jb}{1 + a + jb} \quad (225)$$

alakú, ahol a és b valós. Annak feltétele, hogy $|H_p(z)| \leq 1$ legyen: $\boxed{a \geq -0.5}$. Mivel

$$a = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z), \text{ ill. } 2a = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} + \frac{g_n^* z}{1 - z_n^* z} \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1} - g_n z_n^{-1} + g_n^* z - g_n^* z_n}{2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{-\operatorname{Re}\left[\frac{g_n}{z_n}\right](2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z) + j \operatorname{Im}\left[\frac{g_n}{z_n}\right](z_n z^{-1} - z_n^{-1} z)}{(2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z)} \geq -1,$$

ami z értékétől függetlenül teljesül, ha $\operatorname{Im}\left[\frac{g_n}{z_n}\right] = 0$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Ekkor

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re}\left[\frac{g_n}{z_n}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} r_n \leq 1} \quad (226)$$

Megjegyzések:

1. Stabil szűrők esetén mindig létezik olyan rezonátor-pólus készlet, amelyre (226) teljesül.
2. Stabil szűrők esetén a r_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$ pozitív szám.
3. A jelenséget strukturális stabilitásnak nevezzük, mert a (226) „globális” feltételtől eltekintve a paraméterektől független a „passzivitás” tulajdonság.
4. A (220) összefüggés alapján

$$\boxed{r_m = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}} \quad (227)$$

5. A tervezés menete: (1) a pólusok ismeretében a rezonátor-pólus pozíciók meghatározása úgy, hogy r_m valós legyen, (2) a (227) alapján az r_m értékek kiszámítása, (3) a rezonátor-pólus pozíciók által kijelölt frekvenciákon az átviteli függvény „mintavételezése”, és ezzel a súlyozó együtthatók meghatározása.

Másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagok (Ez szerepelt az előadáson)

Valós együtthatós polinomok gyökei vagy valósak vagy konjugált komplex párok. Ugyanez igaz a belőlük származtatott rezonátoros alaptagokra. A párok összevonásával másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagokhoz jutunk. Valós aritmetikát alkalmazó jelfeldolgozó processzorokban ez utóbbiak alkalmazása életszerűbb.

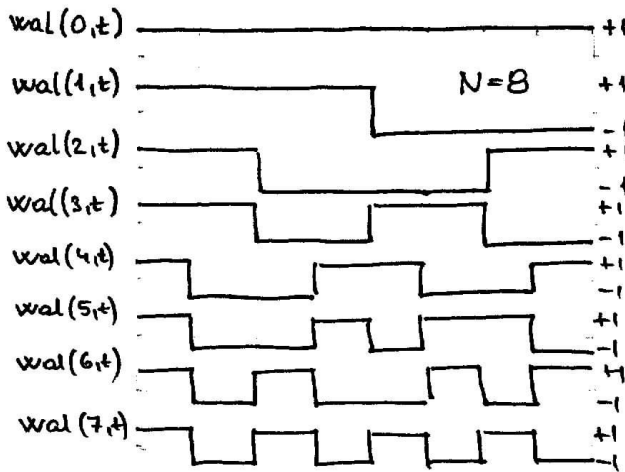
$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = 2r_m \frac{z^{-1} \cos \varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} \cos \varphi_m + z^{-2}} = 2 \operatorname{Re}[m\text{-edik csatorna}] \quad (228)$$

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} - \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = j2r_m \frac{z^{-1} \sin \varphi_m}{1 - 2z^{-1} \cos \varphi_m + z^{-2}} = j2 \operatorname{Im}[m\text{-edik csatorna}] \quad (229)$$

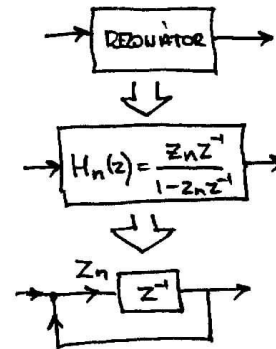
Megjegyzés:

1. A (228)-(229) összefüggésekből közvetlenül származtatható valós együtthatós rezonátor alaptag blokkvázlata az 54. ábrán látható. Az ábra bal oldalán jól azonosítható a nevező polinom megvalósítása, és a valós, valamint a képzetes rész számítása. A jobboldali változat pedig a szorzás-műveletek minimalizálására törekszik.
2. A visszacsatolós struktúrában a valós együtthatós rezonátorok száma legfeljebb $N/2$.
3. A visszacsatolós struktúrában csak a (228) összefüggés szerinti kimeneteket kell összegezni.

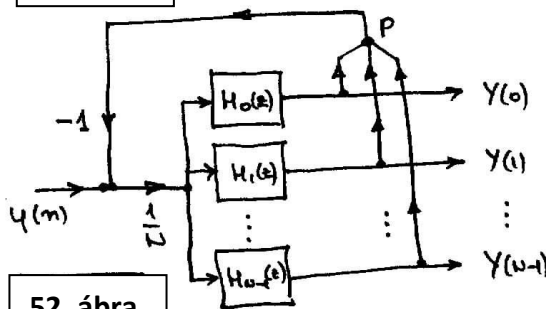
4. A frekvencia-mintavételi eljárás alkalmazása esetén a csatorna kimeneteket az ugyancsak konjugált komplex módon megjelenő w_m súlytényezővel kell megszorozni. Könnyen belátható, hogy a gyakorlati megvalósítás során az m indexű valós kimenet $\text{Re } w_m$ -mel, az m indexű képzetes kimenet $(-\text{Im } w_m)$ -mel szorzandó. Ez utóbbi tényező összevonható a $\sin \varphi_m$ tényezővel.



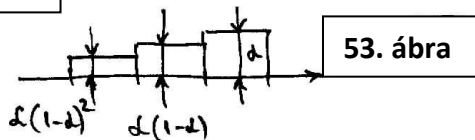
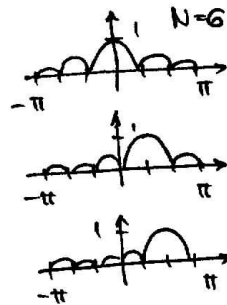
50. ábra



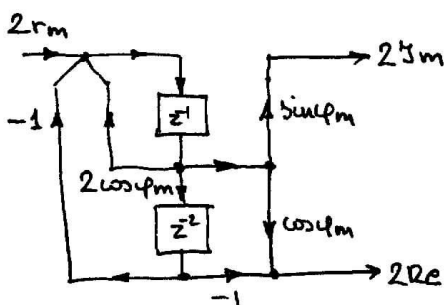
51. ábra



52. ábra



53. ábra



54. ábra

