

### 7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra (folyt.)

#### Rekurzív jelreprezentáció:

- (1) soros-párhuzamos átalakító: az időtartományban értelmezhető  $N$  mintából, a  $N$  minta beérkezését követően előáll a párhuzamos csatornákon  $N$  adat, amely egyértelműen reprezentálja a  $N$  időtartománybeli mintát.
- (2) A számítást folytatva további  $N$  mintára ismét előáll a transzformált tartománybeli reprezentáció. Így folytatva, rendre az  $N$  mintából álló adatblokk egyértelmű reprezentációját kapjuk a blokkméretnek megfelelő mértékű mintavételi-frekvencia csökkentéssel (ún. decimációval.)
- (3) Az ilyen előállítás minden lépésben a legutolsó  $N$  minta transzformáltját adja, azaz csúszó-ablakos/rekurzív transzformációt valósít meg.

A megvalósított transzformációk a (202) szerint felépülő mátrixok, amelyek a rekurzív előállítás következtében interpretálhatók  $N$  csatornás szűrőkként, ahol a szűrők kimenete kétféleképpen képezhető:

- (a) A 45. ábrán látható diszkrét integrátor kimenete, amely folyamatosan a bázis-vektorok súlytényezőit becsli (Fourier esetben ezek a diszkrét „Fourier-sorfejtés/transzformáció” együtthatói),
- (b) A 45. ábrán látható, diszkrét integrátorok utáni keverők, ill. a 49. ábra szerinti diszkrét integrátorok kimenete, amely folyamatosan a feldolgozott jel komponenseit becsli (Fourier esetben ezek az ún. „Fourier komponensek”). Ezek a komponensek minden  $N$  periódus kezdetén megegyeznek a bázis-vektorok súlytényezőivel, vagyis az előző  $N$  minta diszkrét transzformáltjával.

A „jelcsatornák” párhuzamos kimeneteinek lineáris kombinációjával újabb transzformációk hozhatók létre. (Megjegyzés: az órán nem volt, de a zárthelyi szempontjából fontos, ezért szerepeltettem.) Azt, hogy ezzel a lehetőséggel élünk-e, leginkább aszerint határozzuk meg, hogy számítástechnikailag mi előnyösebb:

- (a) Elképzelhető, hogy a rekurzív Fourier transzformáció ( $F$ ) eredménye mindenképpen kell, akkor egy általános transzformációt, különösképp, ha annak csak részhalmaza szükséges, az alábbi összefüggéssel számolunk:

$$x = Ty = V_1 Fy, \quad (210)$$

ahol  $V_1$  négyzetes mátrix.

- (b) Elképzelhető, hogy a transzformáció megválasztásának szempontja a hatékony kiszámíthatóság. Erre nagyon jó példa a Walsh transzformáció ( $W$ ), amelynek bázis/reciprok bázis vektorai – a közös normáló tényezőtől eltekintve – csak +1 és -1 értékeket vesznek fel. Lásd az 50. ábra  $N=8$  esetére. Ez a transzformáció adattömörítésre használható (ilyenkor a  $N$  időtartományi mintát  $M$  transzformált tartománybeli mintával reprezentáljuk) vagy a (210) összefüggéshez hasonlóan további transzformációk előállításánál használjuk:

$$x = Ty = V_2 Wy, \quad (211)$$

ahol  $V_2$  négyzetes mátrix.

- (c) Kimutatták, hogy a Fourier transzformáció előállítása a Walsh transzformáció közbeiktatásával  $N=64$  pontig számítástechnikailag előnyösebb, mint közvetlenül:

$$x = Fy = V_3 W y, \quad (212)$$

ahol  $V_3$  négyzetes mátrix.

**A rezonátor alapú rekurzív diszkrét Fourier transzformátor (RDFT):**

Az eddigiek részbeni összefoglalásaként foglaljuk össze a rezonátor alapú rekurzív Fourier transzformátor jellemzőit. Az 51. ábra az egyes rezonátorokat, az 52. ábra pedig teljes struktúrát illusztrálja. Ez utóbbi egyes csatornáinak átviteli függvényét a (204), az összegzett átviteli függvényt pedig a (205) összefüggés írja le. Az egyes csatornák amplitúdó-karakterisztikája olyan, mint a csúszó ablakos átlagolóé, azzal az eltéréssel, hogy az átvitel éppen az  $m$ -edik frekvencia komponens helyén 1.

Az RDFT rezonátor alapú megvalósítása abban különbözik a diszkrét Fourier transzformációtól, hogy annak eredményét – miközben minden lépésben az előző  $N$  minta „valamilyen” transzformáltját adja –  $N$  lépésenként, azaz „blokkonként” kapjuk meg. A közbenső („valamilyen”) transzformált ugyancsak Fourier transzformálnak tekinthető azzal a különbséggel, hogy a bázisvektorok lépésről-lépésre más fázishelyzetűek.

**Megjegyzés:**

1. Csak páratlan harmonikus komponenset tartalmazó jelek esetén érdekes lehet a  $-1$  egységgyökeire alapozott bázis/reciprok bázis készlet, ill. transzformáció. Ilyenkor az első bázisvektor egy félperiódusú komplex exponenciális, a második egy másfél periódusú, stb. Ilyenkor  $H_p(z) = -z^{-N}$ , azaz a  $N$  lépésnyi késleltetés mellett fázist is fordít.
2. Ha az 52. ábrán az  $1/N$  tényező helyett  $\alpha/N$  szerepel, ahol  $0 < \alpha < 1$ , akkor a csúszó ablakos transzformációt kombinálni tudjuk az exponenciális átlagolással. Ez azt jelenti, hogy az egymást követő,  $N$  hosszúságú blokkokat felejtő hatással, de átlagoljuk. Ilyenkor (205)

$$H_p(z) = \frac{\frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - z^{-N} + \alpha z^{-N}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - (1 - \alpha) z^{-N}} \quad (213)$$

formában írható, ami a mértani sor összegképletével

$$H_p(z) = \alpha z^{-N} + \alpha(1 - \alpha)z^{-2N} + \alpha(1 - \alpha)^2 z^{-3N} + \dots, \quad (214)$$

vagyis az egymástól  $N$  távolságra lévő mintákat egyre csökkenő súllyal vesszük az átlagolásnál figyelembe. (Lásd az 53. ábra, továbbá a (181)-(183) összefüggések.) Ugyanez a hatás az egyes csatorna kimenetek esetében a  $N$  hosszúságú blokkok alapján kiszámított komponens-minták exponenciális átlagolását eredményezi.

**A rezonátor alapú megfigyelő, mint univerzális jelfeldolgozó eszköz:**

Általánosítsuk a (203) összefüggést az alábbi módon:

$$H_m(z) = \frac{g_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \quad (215)$$

Írjuk fel ezzel a  $H_p(z)$  átviteli függvényt:

$$H_p(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} \quad (216)$$

- (a) Ha véges impulzusválaszú (FIR) viselkedést akarunk biztosítani, akkor a (216) összefüggés nevezőjének az alábbi kötetést kell teljesíteni:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{1}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})}, \quad (217)$$

mert ebben az esetben lesz a (216) összefüggés  $z^{-1}$  polinomja, azaz véges impulzusválaszú. Ehhez a  $\{g_m\}$  és az  $\{r_m = g_m / z_m\}$  súlytényezőket

$$\boxed{g_m = \frac{z_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; r_m = \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}} \quad (218)$$

alapján tudjuk meghatározni. FIR szűrőt a frekvencia-mintavételi eljárás szabályai szerint, az egyes csatornák kimeneteinek lineáris kombinációjaként valósítunk meg. Lásd (209) összefüggés.

**Megjegyzés:**

1. A rezonátor pólus pozíciók szabadon megválaszthatók (de legyenek különbözők).
  2. Ha a rezonátor pólus pozíciók az  $N$ -edik egységgyökök, akkor  $r_m = 1/N$  minden  $m$ -re.
- (b) Ha végtelen impulzusválaszú (IIR) viselkedést akarunk, és adottak a megvalósítandó  $p_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , akkor (217) és (218) megfelelője:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - p_n z^{-1})}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})} \quad (219)$$

$$\boxed{g_m = z_m \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; r_m = \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}} \quad (220)$$

A szűrő kimenőjelét ebben az esetben is az egyes csatornák kimeneteinek lineáris kombinációjaként kapjuk.

**Megjegyzés:** A rekurzív jeltranszformátor, továbbá FIR és IIR szűrő megvalósítására egyaránt alkalmas rezonátor-alapú jelfeldolgozó struktúra fontos tulajdonságai:

- (a) A jelet komponensekre bontja, majd (szükség szerint) lineáris kombináció képzéssel szintetizálja.

- (b) A rezonancia frekvenciákon a hurokerősítés végtelen, ezért az átvitel paraméter-érzékenysége – a kimeneti lineáris kombináció súlytényezőit leszámítva – ezeken a frekvenciákon nulla, az átvitel pontosságát kizárólag ezek a súlytényezők befolyásolják.
- (c) A rezonátor pólus pozíciók szisztematikus megválasztásával stabilitási és numerikus szempontból egyaránt kedvező számítási elrendezéshez jutunk.

**Kapcsolat a Lagrange interpolációs polinommal:**

Adott  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$  ún. alappontok felett egy függvény értékei:  $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1), \dots, y_{N-1} = y(x_{N-1})$ . Az ezeken a pontokon “áthaladó” Lagrange interpolációs polinom

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a_m}{x - x_m}, \quad (221)$$

ahol

$$a_m = \frac{y_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (x_m - x_n)} \quad (222)$$

Az összefüggések egybevetésével látható, hogy a frekvencia-mintavételi eljárás (lásd (209) összefüggés) a Lagrange interpolációnak felel meg, és az is, hogy nem csak az  $N$ -edik egységgyökök esetében használható.

**Megjegyzés:**

- (a) Hermite interpoláció: (többszörös rezonátor pólusok esete). Ha az  $x_m$  alappontban egy függvényből  $N_0(m)$  számú adat (érték, első derivált értéke, második derivált értéke, stb.) áll rendelkezésre, akkor az ún. Hermite interpolációs polinom

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n)^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} a_{mi} x^i}{(x - x_m)^{N_0(m)}}, \quad (223)$$

ill. a megfelelő digitális szűrő-készlet

$$H(z) = \prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} A_{mi} z^{-i}}{(1 - z_m z^{-1})^{N_0(m)}}, \quad (224)$$

amelynek közös zérusai, a Lagrange interpolációhoz hasonlóan előállíthatók a közös visszacsatolás segítségével. A különbség csak annyi, hogy a multiplicitásnak megfelelő számú rezonátor sorosan kapcsolódik.

**A passzivitás feltétele rezonátor alapú megfigyelőknél** (Ez nem szerepelt az előadáson, de előre szerepeltetem, hogy a zárhelyire készülést ezzel is segítsen.)

Kedvezőek azok a számítási eljárások, amelyek passzívnak tekinthetők. Ezek tipikusan - a struktúrájukból adódóan - a paramétereik értékétől függetlenül nem növelik a jelszintet egy bizonyos érték fölé. A rezonátoros struktúra esetében

$$H_p(z) = \frac{a + jb}{1 + a + jb} \quad (225)$$

alakú, ahol  $a$  és  $b$  valós. Annak feltétele, hogy  $|H_p(z)| \leq 1$  legyen:  $a \geq -0.5$ . Mivel

$$a = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z), \text{ ill. } 2a = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} + \frac{g_n^* z}{1 - z_n^* z} \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1} - g_n z_n^{-1} + g_n^* z - g_n^* z_n}{2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{-\operatorname{Re} \left[ \frac{g_n}{z_n} \right] (2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z) + j \operatorname{Im} \left[ \frac{g_n}{z_n} \right] (z_n z^{-1} - z_n^{-1} z)}{(2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z)} \geq -1,$$

ami  $z$  értékétől függetlenül teljesül, ha  $\operatorname{Im} \left[ \frac{g_n}{z_n} \right] = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$ . Ekkor

$$\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left[ \frac{g_n}{z_n} \right] = \sum_{n=0}^{N-1} r_n \leq 1 \quad (226)$$

### Megjegyzések:

1. Stabil szűrők esetén mindig létezik olyan rezonátor-pólus készlet, amelyre (226) teljesül.
2. Stabil szűrők esetén a  $r_m, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$  pozitív szám.
3. A jelenséget strukturális stabilitásnak nevezzük, mert a (226) „globális” feltételtől eltekintve a paraméterektől független a „passzivitás” tulajdonság.
4. A (220) összefüggés alapján

$$r_m = \frac{\prod_{n=0, n \neq m}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})} \quad (227)$$

5. A tervezés menete: (1) a pólusok ismeretében a rezonátor-pólus pozíciók meghatározása úgy, hogy  $r_m$  valós legyen, (2) a (227) alapján az  $r_m$  értékek kiszámítása, (3) a rezonátor-pólus pozíciók által kijelölt frekvenciákon az átviteli függvény „mintavételezése”, és ezzel a súlyozó együtthatók meghatározása.

### Másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagok (Ez szerepelt az előadáson)

Valós együtthatós polinomok gyökei vagy valósak vagy konjugált komplex párok. Ugyanez igaz a belőlük származtatott rezonátoros alaptagokra. A párok összevonásával másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagokhoz jutunk. Valós aritmetikát alkalmazó jelfeldolgozó processzorokban ez utóbbiak alkalmazása életszerűbb.

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = 2r_m \frac{z^{-1} \cos \varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} \cos \varphi_m + z^{-2}} = 2 \operatorname{Re}[m\text{-edik csatorna}] \quad (228)$$

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} - \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = j2r_m \frac{z^{-1} \sin \varphi_m}{1 - 2z^{-1} \cos \varphi_m + z^{-2}} = j2 \operatorname{Im}[m\text{-edik csatorna}] \quad (229)$$

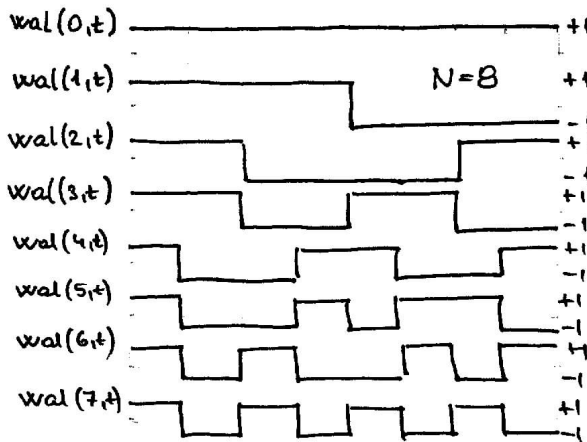
### Megjegyzés:

1. A (228)-(229) összefüggésekből közvetlenül származtatható valós együtthatós rezonátor alaptag blokkvázlata az 54. ábrán látható. Az ábra bal oldalán jól azonosítható a nevező polinom megvalósítása, és a valós, valamint a képzetes rész számítása. A jobboldali változat pedig a szorzás-műveletek minimalizálására törekszik.

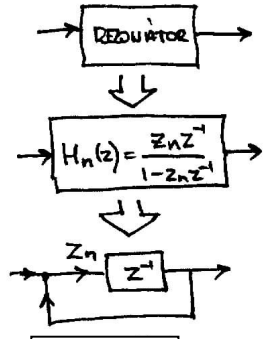
## Méréselmélet: 11. előadás, 2013.04.24.

---

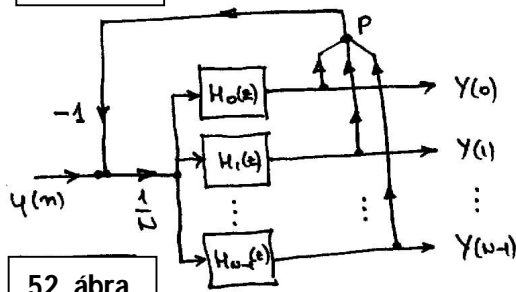
2. A visszacsatolásos struktúrában a valós együtthatós rezonátorok száma legfeljebb  $N/2$ .
3. A visszacsatolásos struktúrában csak a (228) összefüggés szerinti kimeneteket kell összegezni.
4. A frekvencia-mintavételi eljárás alkalmazása esetén a csatorna kimeneteket az ugyancsak konjugált komplex módon megjelenő  $w_m$  súlytényezővel kell megszorozni. Könnyen belátható, hogy a gyakorlati megvalósítás során az  $m$  indexű valós kimenet  $\operatorname{Re} w_m$ -mel, az  $m$  indexű képzetes kimenet  $(-\operatorname{Im} w_m)$ -mel szorzandó. Ez utóbbi tényező összevonható a  $\sin \varphi_m$  tényezővel.



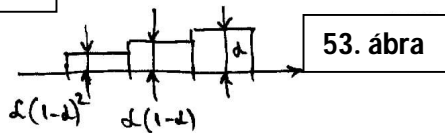
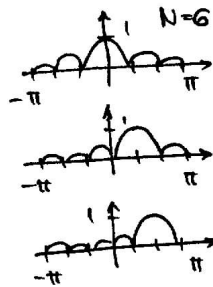
50. ábra



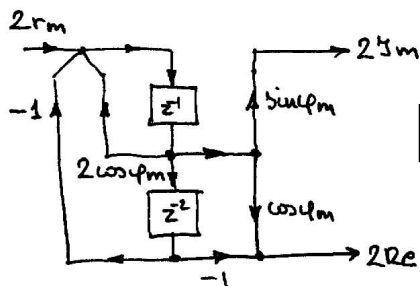
51. ábra



52. ábra



53. ábra



54. ábra

