6. Szűréselmélet alapjai:

I. Optimális nemrekurzív becslő (skalár Wiener szűrő)

Az alábbiakban ismételten a lineáris kombinátor struktúrával foglalkozunk, és természetesen ugyanarra az eredményre jutunk, mindössze a kiindulás némileg eltérő, és a menet közbeni interpretációban fedezhetők fel új elemek. Keressük x legjobb becslőjét $\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k$ ún. lineáris batch processzorral, ahol $y_0, y_1, ..., y_{N-1}$ jelölik a megfigyelési adatokat, a $\{w_k\}$, $k = 0,1,...,N-1$ pedig ismeretlen súlytényezők. A 30. ábra azt illusztrálja, hogy a tér x elemét/vektorát az $\{y_k\}$ elemek által kifeszített altérben, azok lineáris kombinációjával létrehozott $\hat{x}$ elemmel/vektorral igyekszünk közelíteni. Legjobbnak azt a becslést tekintjük, amelyik legkisebb hibával jár: ez az x vektor altérre történő merőleges vetítésével áll elő. Megmutatjuk, hogy ez ekvivalens azzal a megoldással, amelyet a négyzetes hibakritérium minimalizálásával kaptunk:

$$e = x - \hat{x}\,,\ E\{e^2\} = E\{(x-\hat{x})^2\} = E\left\{(x - \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k)^2\right\} \tag{137}$$

$$\frac{\partial E\{e^2\}}{\partial w_j} = -2E\left\{(x - \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k) y_j\right\} = 0\,,\ E\{e y_j\} = 0 \qquad \forall j \text{ -re.} \tag{138}$$

Ez utóbbi az ún. ortogonalitási egyenlet, amely a vektorokkal történő interpretációban éppen azt fejezi ki, hogy az optimális beállítás esetén az e hibavektor merőleges valamennyi y_j vektorra. A (138) összefüggés átrendezésével:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k \underbrace{E\{y_k y_j\}}_{R_{yy}(k,j)} = \underbrace{E\{x y_j\}}_{P_{xy}(j)},\ j = 1,2,...,N-1\,. \tag{139}$$

ahol $R_{yy}(k,j)$ az R_{yy} autokorreláció mátrix (k,j) indexű eleme, $P_{xy}(j)$ a P_{xy} keresztkorreláció vektor j-edik eleme, ahol most (a korábbiakkal ellentétben) a mátrix, ill. vektor indexében külön jeleztük, hogy mely mennyiségek auto-, ill. keresztkorrelációjáról van szó. Az optimális esetben megmaradó hiba:

$$\begin{aligned} E\{(e^2\}\Big|_{\min} &= E\left\{e(x - \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k)\right\}\Bigg|_{\min} = E\{ex\} = E\{(x-\hat{x})x\} = E\{x^2\} - \sum_{k=0}^{N-1} w_k E\{x y_k\} = \\ &= E\{x^2\} - \sum_{k=0}^{N-1} w_k P_{xy}(k) \end{aligned} \tag{140}$$

Mindez mátrix formában (ahol $W = [w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_{N-1}]^T$):

$$R_{yy} W = P_{xy}\,,\ W = R_{yy}^{-1} P_{xy}\,,\ E\{(e^2\}\Big|_{\min} = E\{x^2\} - P_{xy}^T R_{yy}^{-1} P_{xy} \tag{141}$$

1. Példa: Zajos megfigyeléseink vannak x-ről: $y_k = x + n_k$. A zaj tulajdonságai: $E\{x n_j\} = 0$ $\forall j - re$, $E\{n_j n_k\} = \begin{cases} 0\_\ j \neq k \\ \sigma_n^2\ j = k \end{cases}$. A jel tulajdonságai: $E\{x\} = 0$, $E\{x^2\} = \sigma_n^2$. A korreláció mátrixok: $R_{yy}(k,j) = E\{y_k, y_j\} = E\{(x+n_k)(x+n_j)\} = \sigma_x^2 + \sigma_n^2 \delta_{kj}$, $P_{xy}(j) = E\{x y_j\} = \sigma_x^2$. A (141) szerinti összefüggések közül az első részletesen kifejtve:

$$\begin{array}{llll} (\sigma_x^2+\sigma_n^2)w_0 + & \sigma_x^2 w_1 + & \ldots + & \sigma_x^2 w_{N-1} = \sigma_x^2 \\ \sigma_x^2 w_0 + & (\sigma_x^2+\sigma_n^2)w_1 + & \ldots + & \sigma_x^2 w_{N-1} = \sigma_x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ \sigma_x^2 w_0 + & \sigma_x^2 w_1 + & \ldots + & (\sigma_x^2+\sigma_n^2) w_{N-1} = \sigma_x^2 \end{array} \tag{142}$$

Összeadva a N egyenletet:

$(\sigma_n^2 + N\sigma_x^2)\sum_{k=0}^{N-1} w_k = N\sigma_x^2$, ill. $\sum_{k=0}^{N-1} w_k = \frac{N\sigma_x^2}{\sigma_n^2 + N\sigma_x^2}$, amit soronként visszahelyettesítve:

$w_0 = w_1 = ... = w_{N-1} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2 + N\sigma_x^2}$, amivel $\boxed{\hat{x} = \frac{1}{N + (\frac{\sigma_n}{\sigma_x})^2}\sum_{k=0}^{N-1} y_k}$, ill. a hiba: (143)

$$\boxed{E\{e^2\}\Big|_{\min} = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \frac{N}{N + (\frac{\sigma_n}{\sigma_x})^2} = \frac{\sigma_n^2}{N + (\frac{\sigma_n}{\sigma_x})^2}} \tag{144}$$

Megjegyzés: Érdemes a fenti összefüggéseket $\gamma = (\frac{\sigma_n}{\sigma_x})^2$ függvényében vizsgálni.

2. Példa: Lineárisan növekvő jelből két mintát veszünk. (Az órán nem szerepelt, de az anyag része.) Becsülendő a meredekség. Használjuk a $\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k$ becslőt, ahol $y_k = (k+1)x + n_k$, k=0,1. A korreláció mátrixok:

$$R_{yy}(j,k) = E\{((j+1)x + n_j)((k+1)x + n_k)\} = (j+1)(k+1)E\{x^2\} + E\{n_j n_k\} = (j+1)(k+1)S + \sigma_n^2 \delta_{jk}$$

$P_{xy}(j) = E\{(xy_i\} = E\{x((j+1)x + n_j)\} = (j+1)E\{x^2\} = (j+1)S,$ ahol $S = \sigma_x^2 + (E\{x\})^2$, hiszen most végképp nem várható el, hogy az ismeretlen mennyiség várható értéke nulla legyen. Behelyettesítve a (141) első összefüggésébe:

$\left.\begin{array}{lll} (S+\sigma_n^2)w_0 & 2Sw_1 & = S \\ 2Sw_0 & (4S+\sigma_n^2)w_1 & = 2S \end{array}\right\}$ $\boxed{w_0 = \frac{1}{5 + \frac{\sigma_n^2}{S}}, w_1 = \frac{2}{5 + \frac{\sigma_n^2}{S}}}$, most legyen $\gamma = \frac{\sigma_n^2}{S}$, amivel

$$\boxed{w_0 = \frac{1}{5+\gamma}, w_1 = \frac{2}{5+\gamma}}, \text{ és végül } \boxed{\hat{x} = \frac{y_0 + 2y_1}{5+\gamma}, E\{e^2\} = S\frac{\gamma}{5+\gamma}} \tag{145}$$

Rekurzív becslő az optimális nemrekurzív becslőből:

Bevezető példa: az egyszerű átlagolás rekurzív formában. (Az órán nem szerepelt, de az anyag része.) Megjegyzés: az iterációs indexhez asszociálhatjuk a diszkrét időt ($n = 1,2,...$):

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y(k), \qquad \hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y(k) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1}y(n) = \frac{n}{n+1}\hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}(y(n) - \hat{x}(n)) \tag{146}$$

Megjegyzés: A rekurzív eljárás nagy előnye, hogy nem kell megvárni az összes adatot: folyamatosan számolható az egyre jobb minőségű becslő.

Visszatérve az optimális becslőhöz, *N* helyett *n*-t írva:

$$\hat{x}(n)=\sum_{k=0}^{n-1} w_k(n)y(k)\,,\quad w_k(n)=\frac{1}{n+\gamma},\ \text{ ahol }\ \gamma=(\frac{\sigma_n}{\sigma_x})^2,\quad E\{e^2(n)\}=E\{(x-\hat{x}(n))^2\}=\frac{\sigma_n^2}{n+\gamma},$$

aminek felhasználásával $w_k(n)=\dfrac{E\{e^2(n)\}}{\sigma_n^2}$ alakban is írható. Mindezeket megismételve *n*+1-re:

$$\hat{x}(n+1)=\sum_{k=0}^{n} w_k(n)y(k)\,,\quad w_k(n+1)=\frac{1}{n+1+\gamma},\quad E\{e^2(n+1)\}=E\{(x-\hat{x}(n+1))^2\}=\frac{\sigma_n^2}{n+1+\gamma},$$

aminek felhasználásával $w_k(n+1)=\dfrac{E\{e^2(n+1)\}}{\sigma_n^2}$ alakban is írható. Követve (146) lépéseit:

$$\hat{x}(n+1)=\frac{1}{n+1+\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}y(k)+\frac{1}{n+1+\gamma}y(n)=\frac{n+\gamma}{n+1+\gamma}\hat{x}(n)+\frac{1}{n+1+\gamma}y(n)=$$

$$=\hat{x}(n)+\frac{1}{n+1+\gamma}(y(n)-\hat{x}(n)) \tag{147}$$

A későbbiek szempontjából érdekes még a négyzetes hiba alakulása. A fentiek alapján:

$$\frac{E\{e^2(n+1)\}}{E\{e^2(n)\}}=\frac{w_k(n+1)}{w_k(n)}=\frac{n+\gamma}{n+1+\gamma}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n+\gamma}}=\frac{1}{1+\dfrac{E\{e^2(n)\}}{\sigma_n^2}} \tag{148}$$

Ezek felhasználásával (147) átírható:

$$\hat{x}(n+1)=\frac{E\{e^2(n+1)\}}{E\{e^2(n)\}}\hat{x}(n)+\frac{E\{e^2(n+1)\}}{\sigma_n^2}y(n)=\hat{x}(n)+\frac{E\{e^2(n+1)\}}{\sigma_n^2}(y(n)-\hat{x}(n)) \tag{149}$$

3. Példa: $\gamma=2$, σ_n^2 adott. A fentiek alapján: $\hat{x}(1)=\dfrac{y(0)}{3}, E\{e^2(1)\}=\dfrac{\sigma_n^2}{3}$,

(136) felhasználásával: $E\{e^2(2)\}=\dfrac{E\{e^2(1)\}}{1+\dfrac{E\{e^2(1)\}}{\sigma_n^2}}=\dfrac{\sigma_n^2}{4}$, amivel (137) *n*=1-re

$$\hat{x}(2)=\frac{\frac{\sigma_n^2}{4}}{\frac{\sigma_n^2}{3}}\hat{x}(1)+\frac{\frac{\sigma_n^2}{4}}{\sigma_n^2}y(1)=\frac{3}{4}\hat{x}(1)+\frac{1}{4}y(1)=\hat{x}(1)+\frac{1}{4}(y(1)-\hat{x}(1))=\frac{1}{4}(y(0)+y(1)),$$

$$E\{e^2(3)\}=\frac{\sigma_n^2}{5},\ \hat{x}(3)=\frac{\frac{\sigma_n^2}{5}}{\frac{\sigma_n^2}{4}}\hat{x}(2)+\frac{\frac{\sigma_n^2}{5}}{\sigma_n^2}y(2)=\frac{4}{5}\hat{x}(2)+\frac{1}{5}y(2)\text{, stb.}$$

Jelölés: a (149) összefüggés együtthatói: $a(n+1)=\dfrac{E\{e^2(n+1)\}}{E\{e^2(n)\}}, b(n+1)=\dfrac{E\{e^2(n+1)\}}{\sigma_n^2}$,

amivel:
$$\boxed{\hat{x}(n+1)=a(n+1)\hat{x}(n)+b(n+1)y(n)} \tag{150}$$

Vegyük észre, hogy $\frac{a(n+1)}{b(n+1)} = \frac{1}{b(n)}$, illetve a (136) összefüggés alapján $a(n+1) = \frac{1}{1+b(n)} = \frac{1}{1+\frac{b(n+1)}{a(n+1)}} = \frac{a(n+1)}{a(n+1)+b(n+1)}$, amiből $a(n+1) = 1 - b(n+1)$, ezzel

$$\boxed{\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \underbrace{b(n+1)(y(n) - \hat{x}(n))}_{korrekciós\_tag}} \qquad (151)$$

A (151) összefüggés a nemrekurzív optimális rekurzív becslő rekurzív formája, amely minden lépésben - egy újabb mérés révén - egy újabb dimenzióval bővíti azt az alteret, amelyre vetítjük az *x* vektort. Az optimális rekurzív becslő egy az eddigihez képest gazdagabb modellre épít.

II. Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman szűrő):

A modell, amit alkalmazunk a legegyszerűbb állapotváltozós modell, amelynek gerjesztését egy zajfolyamat adja. Determinisztikus gerjesztést is kaphat, de a linearitás miatt érvényes szuperpozíció tétele folytán az külön tárgyalható:

$x(n) = ax(n-1) + w(n-1)$, ahol $\{w(n)\}$ nulla várható értékű fehér-zaj folyamat, melyre

$$E\{w(n)\} = 0, E\{w(n)w(j)\} = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ \sigma_w^2 & n = j \end{cases}, \quad \left.\begin{matrix} x(n) = 0 \\ w(n) = 0 \end{matrix}\right\} ha \quad n < 0$$

Megjegyzés: Ez az ún. elsőrendű autoregresszív folyamat: első rendben függ az érték az előző „időpillanatbeli” értéktől.

$$E\{x(n)\} = 0, \quad E\{x^2(n)\} = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 = E\left\{a^2x^2(n-1) + w^2(n-1) + 2ax(n-1)w(n-1)\right\} =$$

$$a^2R_{xx}(0) + R_{ww}(0) = a^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2, \text{ ahonnan } \boxed{R_{xx}(0) = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2}} \quad . \qquad (152)$$

$R_{xx}(1) = E\{x(n)x(n+1)\} = E\{x(n)(ax(n) + w(n))\} = aR_{xx}(0)$, mert $E\{x(n)w(n)\} = 0$.

$R_{xx}(2) = E\{x(n)x(n+2)\} = E\{x(n)(ax(n+1) + w(n+1))\} = a^2R_{xx}(0)$, általában

$$\boxed{R_{xx}(j) = E\{x(n)x(n+j)\} = R_{xx}(j) = a^{|j|}R_{xx}(0)}. \qquad (153)$$

A megfigyelés lineáris modelljét a 31. ábrán láthatjuk. A megfigyelés additív zajjal terhelt. Erre a zajra vonatkozóan ugyanolyan feltételezésekkel élünk, mint $w(n)$ esetében. A két zajfolyamatnak egymáshoz nincsen köze, korrelálatlanok. A rekurzív becslő az új megfigyelés és a korábbi becslés lineáris kombinációja (lásd 32. ábra):

$$\boxed{\hat{x}(n) = a(n)\hat{x}(n-1) + b(n)y(n)} \qquad (154)$$

Megjegyzés: Létezik az ún. prediktor-séma is: $\boxed{\hat{x}(n+1) = \alpha(n)\hat{x}(n) + \beta(n)y(n)}$. (155)

Keressük a (154) összefüggés optimális súlytényezőit a 30. ábrán szereplő illusztráció szellemében. Ehhez: $e(n) = x(n) - \hat{x}(n), \quad E\left\{e^2(n)\right\} = E\left\{(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))^2\right\}$. Az optimális beállítás feltételei:

$$\frac{\partial E\left\{e^2(n)\right\}}{\partial a(n)} = -2E\{e(n)\hat{x}(n-1)\} = 0, \quad \frac{\partial E\left\{e^2(n)\right\}}{\partial b(n)} = -2E\{e(n)y(n)\} = 0,$$

vagyis az aktuális ortogonalitási egyenletek:

$$\boxed{E\{e(n)\hat{x}(n-1)\}=0, \quad E\{e(n)y(n)\}=0} \tag{156}$$

A 30. ábra segítségével szavakban: az $e(n)$ hiba-vektor merőleges az $\hat{x}(n-1)$ és az y(n) vektorokra, ill. az általuk kifeszített síkra.

$\boxed{a(n)}$ meghatározása: (156) alapján $E\{(x(n)-a(n)\hat{x}(n-1)-b(n)y(n))\hat{x}(n-1)\}=0$. Ha ebbe beleírjuk: $a(n)x(n-1)-a(n)x(n-1)=0, \quad y(n)=cx(n)+n(n)$, azaz

$$E\{(a(n)(x(n-1)-\hat{x}(n-1))-a(n)x(n-1))\hat{x}(n-1)+(x(n)-cb(n)x(n)-b(n)n(n))\hat{x}(n-1)\}=0$$

átrendezve:

$$a(n)E\{-e(n-1)\hat{x}(n-1)+x(n-1)\hat{x}(n-1)\}=E\{((1-cb(n))x(n)-b(n)n(n))\hat{x}(n-1)\} \tag{157}$$

Itt $E\{e(n-1)\hat{x}(n-1)\}=0$, mert $\hat{x}(n-1)=a(n-1)\hat{x}(n-2)+b(n-1)y(n-1)$ tagjai ortogonálisak $e(n\text{-}1)$-re. Hasonlóképpen a megfigyelési zaj $n(n)$ mintája korrelálatlan $\hat{x}(n-1)$ értékével. Ezzel (157) az alábbi formában írható:

$$a(n)E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\}=(1-cb(n))E\{x(n)\hat{x}(n-1)\}$$

Behelyettesítve, hogy $x(n)=ax(n-1)+w(n-1)$, és $E\{w(n-1)\hat{x}(n-1)\}=0$, kapjuk:

$a(n)E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\}=a(1-cb(n))E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\}$, azaz $\boxed{a(n)=a(1-cb(n))}$, amivel

$$\boxed{\hat{x}(n)=a\hat{x}(n-1)+b(n)(y(n)-ac\hat{x}(n-1))} \tag{158}$$

Megjegyzés: Látható, hogy a megfigyelt rendszer modellje beépült a megfigyelésbe. (158) jobboldalának második tagja pedig egy korrekció, amely a mért érték $\hat{y}(n)=ac\hat{x}(n-1)$ becslését veszi alapul. A (158) összefüggésnek megfelelő becslő blokkvázlata a 33. ábrán látható.

$\boxed{b(n)}$ meghatározása (az órán nem szerepelt, de az anyag része):

$E\{e^2(n)\}=E\{e(n)(x(n)-\hat{x}(n))\}=E\{e(n)x(n)\}$, mert $\hat{x}(n)=a(n)\hat{x}(n-1)+b(n)y(n)$ jobb-oldalán lévő tagok ortogonálisak $e(n)$-re. Mivel $y(n)=cx(n)+n(n)\Rightarrow cx(n)=y(n)-n(n)$.

Ez utóbbit felhasználva $cE\{e(n)x(n)\}=-E\{e(n)n(n)\}$, vagyis $E\{e^2(n)\}=-\frac{1}{c}E\{e(n)n(n)\}$. Ezt tovább alakítva:

$$E\{e^2(n)\}=-\frac{1}{c}E\{(x(n)-\hat{x}(n))n(n)\}=-\frac{1}{c}E\{(x(n)-a(n)\hat{x}(n-1)-b(n)y(n))n(n)\}.$$

Mivel $x(n),\hat{x}(n-1)$ korrelálatlan $n(n)$-nel, ezért írható:

$$E\{e^2(n)\}=\frac{b(n)}{c}E\{y(n)n(n)\}=\frac{b(n)}{c}\sigma_n^2, \text{ ahonnan } \quad \boxed{b(n)=c\frac{E\{e^2(n)\}}{\sigma_n^2}} \tag{159}$$

Megjegyzés: Ez a forma még nem igazán jó, $e(n)$ négyzetes várható értékének a meghatározásához kell $b(n)$ értéke. Szükség van egy olyan kifejezésre, amelyben legfeljebb $e(n\text{-}1)$ négyzetes várható értéke szerepel. Az átlagos négyzetes hiba kifejezésébe írjuk be a (158) összefüggést:

$$E\{e^2(n)\}=E\{[x(n)-\hat{x}(n)]^2\}=E\{[x(n)-a\hat{x}(n-1)-b(n)(y(n)-ac\hat{x}(n-1))]^2\} \tag{160}$$

Ebbe helyettesítsük be az $y(n)=cx(n)+n(n)$ és $x(n)=ax(n-1)+w(n-1)$ összefüggéseket:

$E\{e^2(n)\} =$

$= E\{[ax(n-1) + w(n-1) - a\hat{x}(n-1) - b(n)(acx(n-1) + cw(n-1) + n(n) - ac\hat{x}(n-1))]^2\} =$

$= E\{[a(1-cb(n))e(n-1) + (1-cb(n))w(n) - b(n)n(n)]^2\}$

Elvégezve a négyzetre emelést: a keresztszorzatok várható értékei nullák lesznek, ami marad

$$\boxed{E\{e^2(n)\} = a^2(1-cb(n))^2 E\{e^2(n-1)\} + (1-cb(n))^2\sigma_w^2 + b^2(n)\sigma_n^2} \tag{161}$$

(159) alapján $E\{e^2(n)\} = \dfrac{b(n)}{c}\sigma_n^2$. Ezt behelyettesítve a (161) összefüggésbe:

$\dfrac{b(n)}{c}(1-cb(n))\sigma_n^2 = (1-cb(n))^2[a^2E\{e^2(n-1)\} + \sigma_w^2]$, ami egyszerűsítés után alkalmas $b(n)$ meghatározására: $b(n)[a^2c^2E\{e^2(n-1)\} + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2] = c[a^2E\{e^2(n-1)\} + \sigma_w^2]$, amiből

$$\boxed{b(n) = \frac{c[a^2E\{e^2(n-1)\} + \sigma_w^2]}{[a^2c^2E\{e^2(n-1)\} + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2]}} \tag{162}$$

Megjegyzés: Ha $\sigma_n = 0$, akkor $b(n) = \dfrac{1}{c}$. Ezzel $E\{e^2(n)\} = 0$.

Összefoglalva:
A rendszermodell: $x(n) = ax(n-1) + w(n-1)$, a megfigyelés: $y(n) = cx(n) + n(n)$. Az optimális rekurzív szűrő

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ac\hat{x}(n-1)) \\ &b(n) = cp(n)[c^2p(n) + \sigma_n^2]^{-1}, \quad ahol \\ &p(n) = a^2E\{e^2(n-1)\} + \sigma_w^2 \\ &E\{e^2(n)\} = p(n) - cb(n)p(n) \\ &p(n+1) = a^2(1-cb(n))p(n) + \sigma_w^2 \end{aligned}}. \tag{163}$$

Optimális rekurzív prediktor (az órán nem szerepelt, de az anyag része)**:**

A becslő kifejezése (lásd (155)): $\boxed{\hat{x}(n+1) = \alpha(n)\hat{x}(n) + \beta(n)y(n)}$, ami hasonló átírásokkal

$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n))$$

formára hozható. A levezetés hasonló lépésekből áll, mint a szűrő esetében, azzal, hogy $p(n+1) = E\{e^2(n+1)\}$ minimalizálását írjuk elő. A levezetést majd a vektoros esetre mutatjuk be.

Összefoglalva:
A rendszermodell: $x(n+1) = ax(n) + w(n)$, a megfigyelés: $y(n) = cx(n) + n(n)$. Az optimális rekurzív prediktor

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n)) \\ &\beta(n) = acp(n)[c^2p(n) + \sigma_n^2]^{-1} \\ &p(n+1) = a(a - c\beta(n))p(n) + \sigma_w^2 \end{aligned}}. \tag{164}$$

Megjegyzés: A 34. ábra az optimális, egylépéses prediktor blokkvázlatát mutatja be, a 35. ábrán egy olyan elrendezés látható, amely szűrőként és prediktorként egyaránt használható.

Példa: skalár Kalman szűrő. (Az órán nem szerepelt, de az anyag része.) Tegyük fel, hogy: $E\{x(n)\} = 0$. Mivel $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}(1) = b(1)y(1)$. A $b(1)$ értéket az ortogonalitási összefüggésből kapjuk: $E\{[x(1)-\hat{x}(1)]y(1)\}=0$, ahol $y(1)=x(1)+n(1)$. A c értékét 1-re választottuk. Ezzel $\hat{x}(1)=b(1)[x(1)+n(1)]$. Mindezeket behelyettesítve az ortogonalitási összefüggésbe: $E\{[(1-b(1))x(1)-b(1)n(1)][x(1)+n(1)]\}=$

$=(1-b(1))\sigma_x^2+b(1)\sigma_n^2=0$. Ebből $b(1)=\dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_n^2}$. Ha például $\sigma_n^2=\sigma_w^2$, és $a^2=\dfrac{1}{2}$, akkor $\sigma_x^2=\dfrac{\sigma_w^2}{1-a^2}=2\sigma_n^2$. Ezzel $b(1)=\dfrac{2}{3}$. A (159) összefüggés felhasználásával $E\{e^2(1)\}=\dfrac{2}{3}\sigma_n^2$.
Ezek után már tudjuk használni a (162) összefüggést:

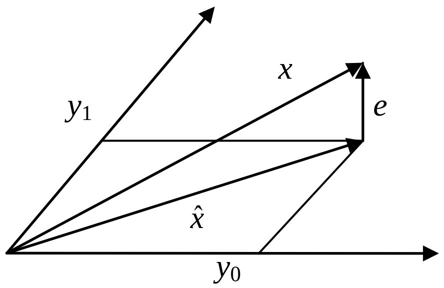
$$b(2)=\frac{a^2E\{e^2(1)\}+\sigma_w^2}{\sigma_n^2+\sigma_w^2+a^2E\{e^2(1)\}}=\frac{\frac{1}{3}+1}{2+\frac{1}{3}}=\frac{4}{7}\approx 0.57$$

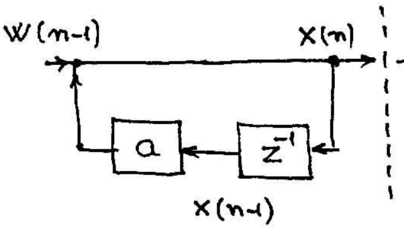
. Ismét a (147) összefüggés alkalmazásával:

$E\{e^2(2)\}=\dfrac{4}{7}\sigma_n^2\cong 0.57\sigma_n^2$. Így folytatva: $b(3)=\dfrac{9}{16}$, $E\{e^2(3)\}=\dfrac{9}{16}\sigma_n^2\cong 0.562\sigma_n^2$. Az iterációt folytatva elérünk egy állandósult állapotot, amikor $E\{e^2(k+1)\}\cong E\{e^2(k)\}=p$. Ezt behelyettesítve (159) és (162) összefüggésekbe, majd egymással egyenlővé téve kapjuk:

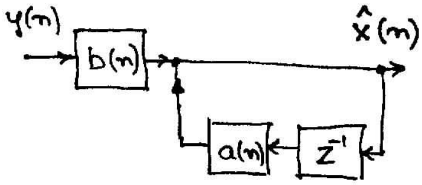
$p^2+3p\sigma_n^2-2\sigma_n^4=0$, amiből $p=0.56\sigma_n^2$. Látható, hogy a harmadik iterációs lépés már elég közel vitt az állandósult állapothoz.

30. ábra

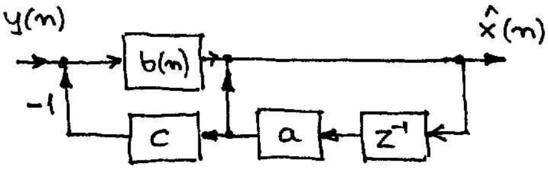




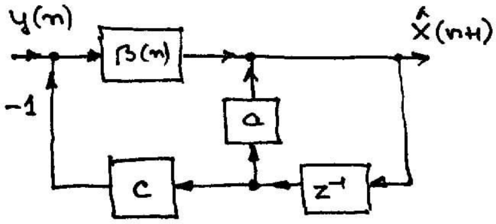
31. ábra



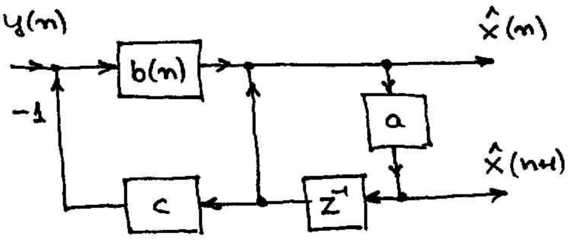
32. ábra



33. ábra



34. ábra



35. ábra