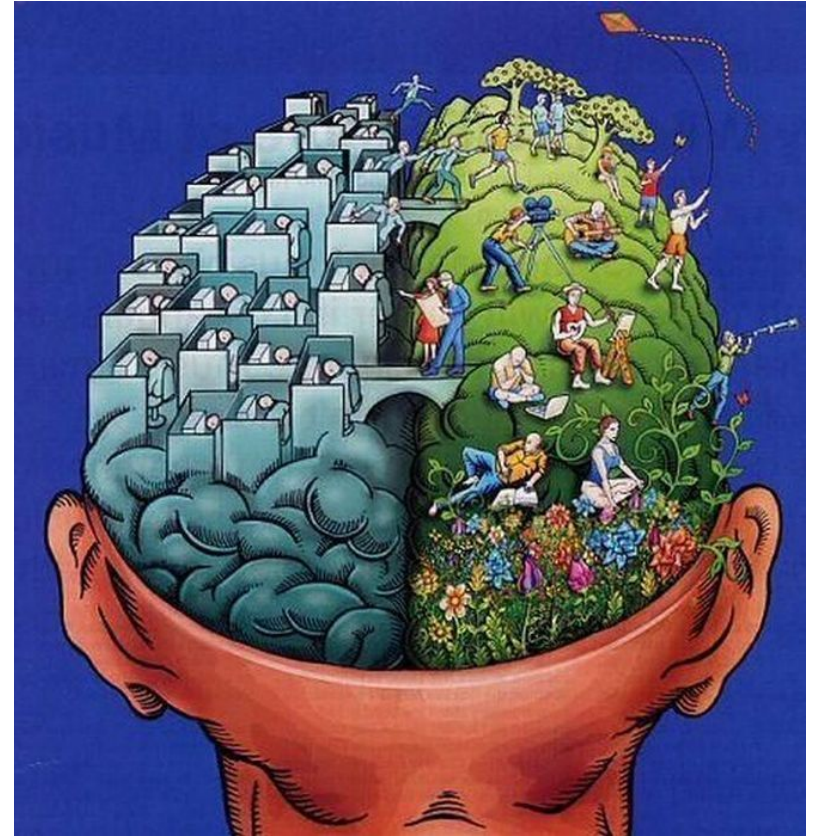


Mesterséges Intelligencia MI

Valószínűségi hálók - következtetés

Dobrowiecki Tadeusz
Eredics Péter, és mások



BME I.E. 437, 463-28-99

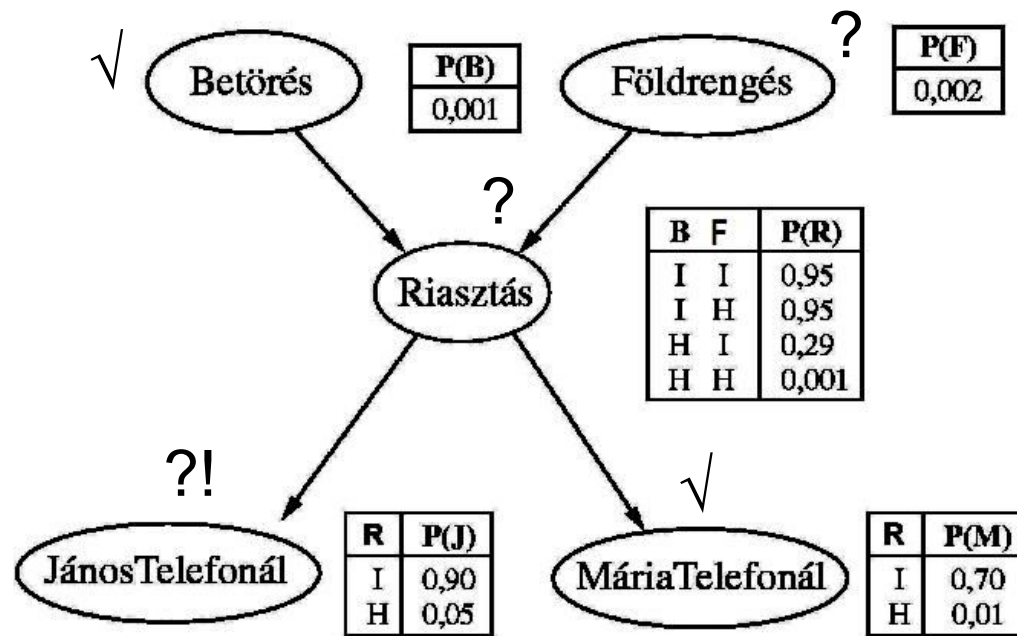
dobrowiecki@mit.bme.hu,

<http://www.mit.bme.hu/general/staff/tade>

Következtetés valószínűségi hálókbán

$P(\text{lekérdezés} \mid \text{bizonyíték})$?

- **egzakt** – „egyszerű” hálónál egyszerű,
„bonyolult” hálónál bonyolult
- **közelítő** – „bonyolult” háló esetén is egyszerű



Összegzés rejtett változókra

$$P(J|M \neg B) = ?$$

$$= P(JM \neg B) / P(M \neg B)$$

$$P(JM \neg B) = \sum_{rf} P(JM \neg B r f)$$

$$P(M \neg B) = \sum_{rfj} P(M \neg B r f j)$$

$$P(J M \neg B \neg R \neg F) = P(J|R) P(M|R) P(R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(F) = \dots$$

$$P(J M \neg B \neg R F) = P(J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots$$

$$P(J M \neg B R \neg F) = P(J|R) P(M|R) P(R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots$$

$$P(J M \neg B R F) = P(J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots$$

$$P(M \neg B J R \neg F) = P(J|R) P(M|R) P(R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(F) = \dots$$

$$P(M \neg B J R F) = P(J|R) P(M|R) P(R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots$$

$$P(M \neg B J \neg R \neg F) = P(J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(F) = \dots$$

$$P(M \neg B J \neg R F) = P(J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots$$

$$P(M \neg B \neg J R \neg F) = P(\neg J|R) P(M|R) P(R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(F) = \dots$$

$$P(M \neg B \neg J R F) = P(\neg J|R) P(M|R) P(R|\neg B F) P(\neg B) P(F) = \dots$$

$$P(M \neg B \neg J \neg R \neg F) = P(\neg J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B \neg F) P(\neg B) P(F) = \dots$$

$$P(M \neg B \neg J \neg R F) = P(\neg J|\neg R) P(M|\neg R) P(\neg R|\neg B F) P(\neg B) P(\neg F) = \dots$$

Következtetés

felsorolással (balról jobbra)

$$P(B \mid J M) = ?$$

$$P(B \mid J M) = \alpha \sum_F \sum_R P(B \text{ } F \text{ } R \mid J M)$$

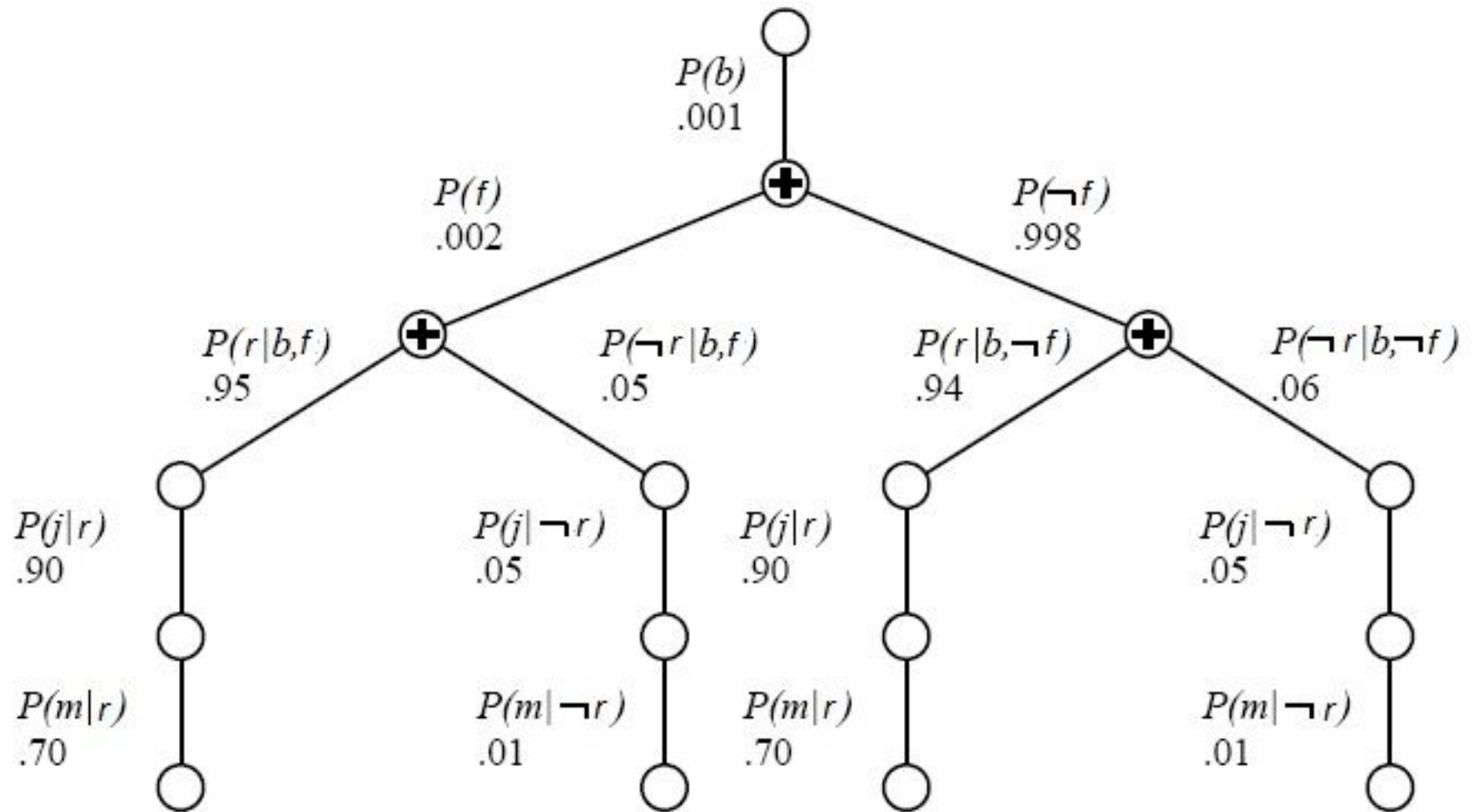
$$= \alpha \sum_F \sum_R P(B) P(F) P(R \mid B F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$

$$= \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R P(R \mid B F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$

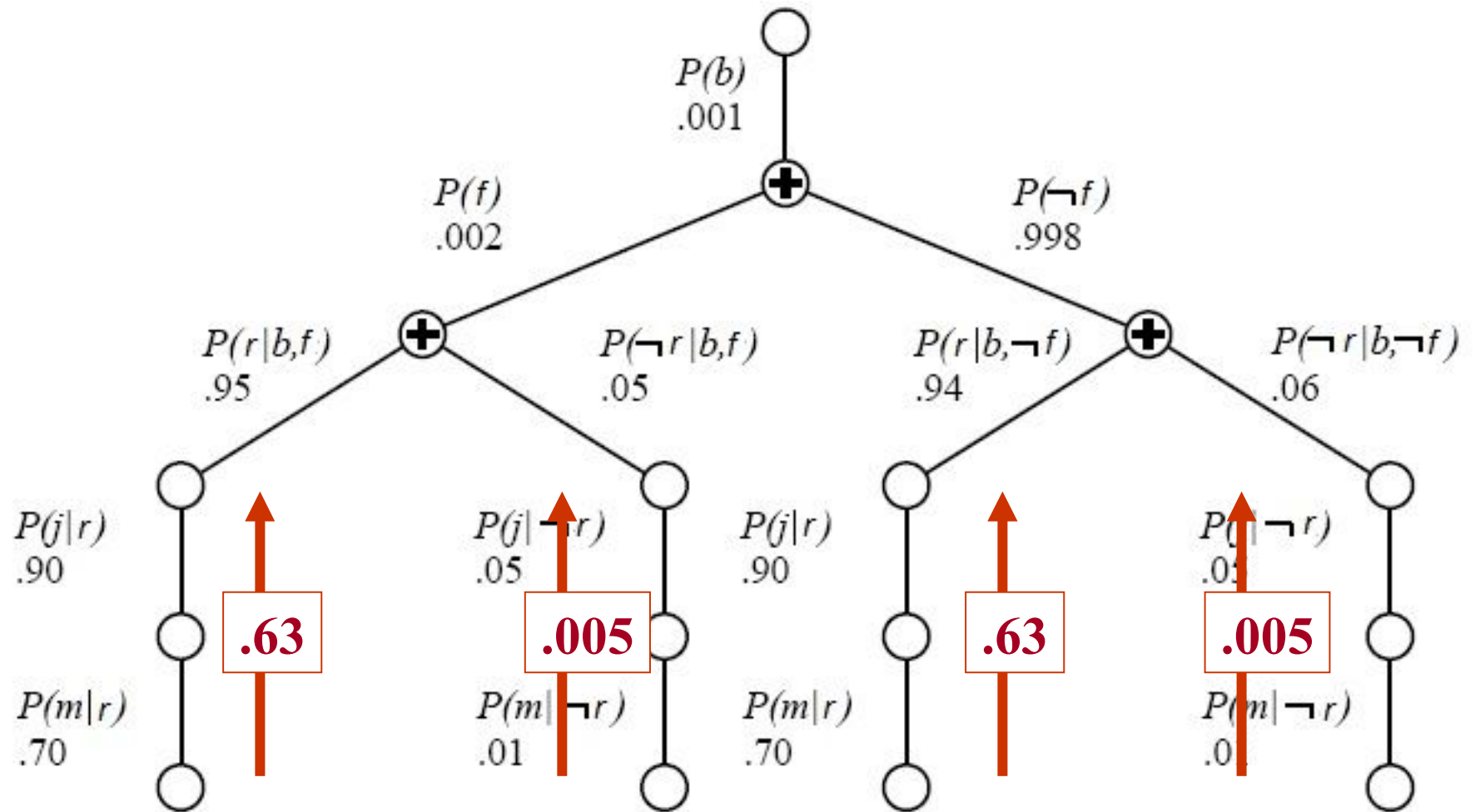
$$\text{és pl. } P(F \mid J M) = \alpha \sum_B \sum_R P(F \text{ } B \text{ } R \mid J M) = \dots$$

$$P(B \mid J M) \geq P(F \mid J M) ?$$

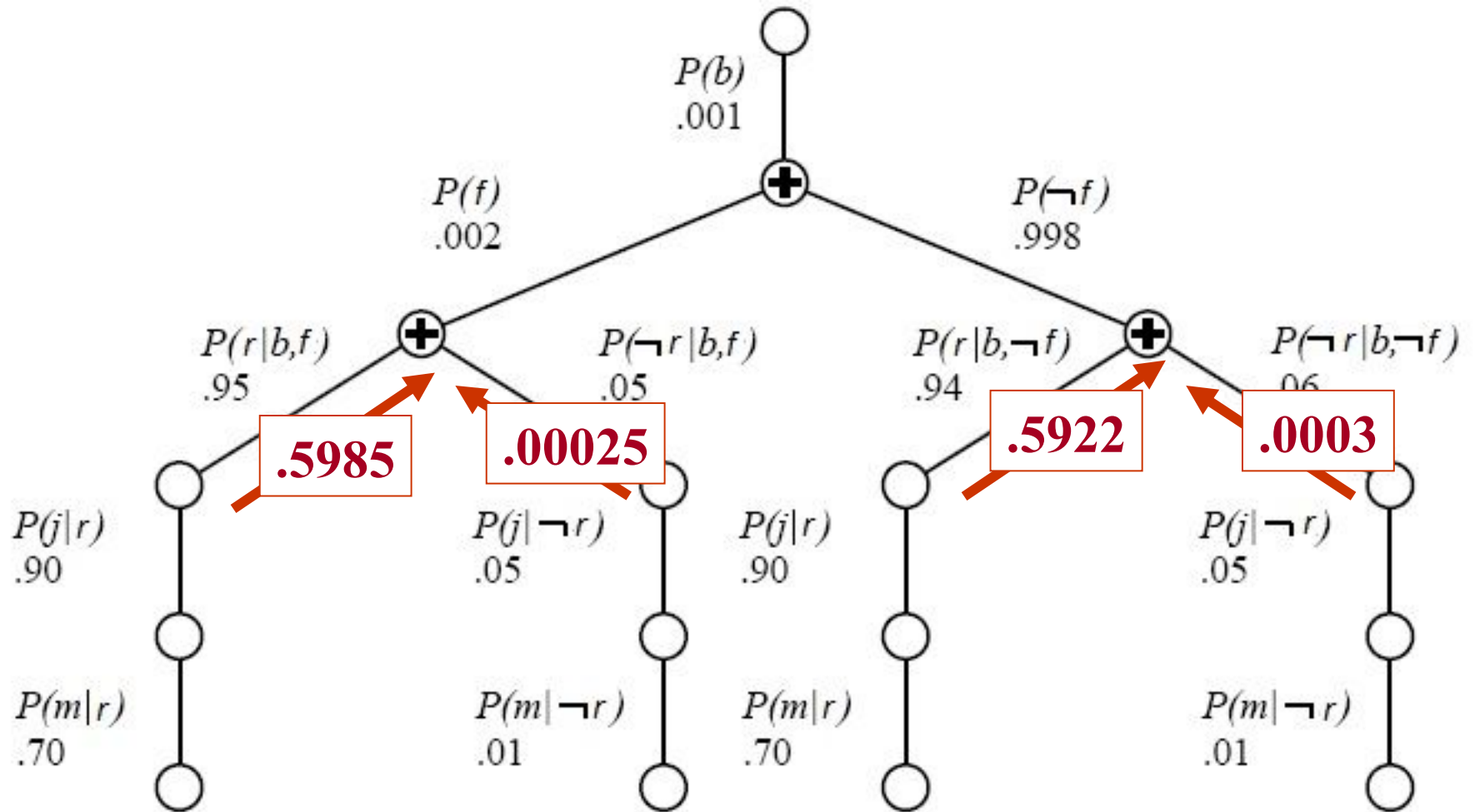
$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R P(R \mid B \ F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$



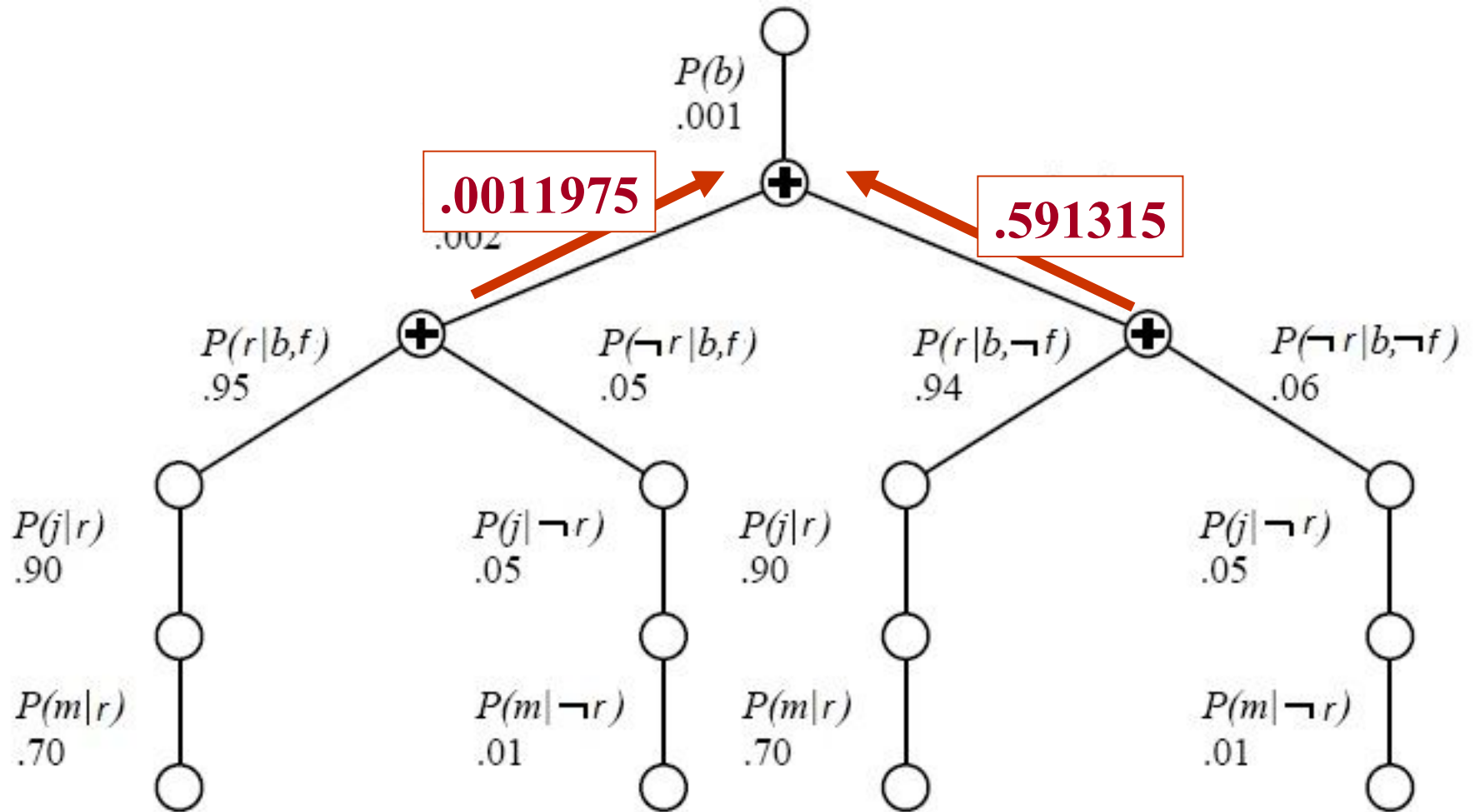
$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \Sigma_F P(F) \Sigma_R P(R \mid B \ F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$



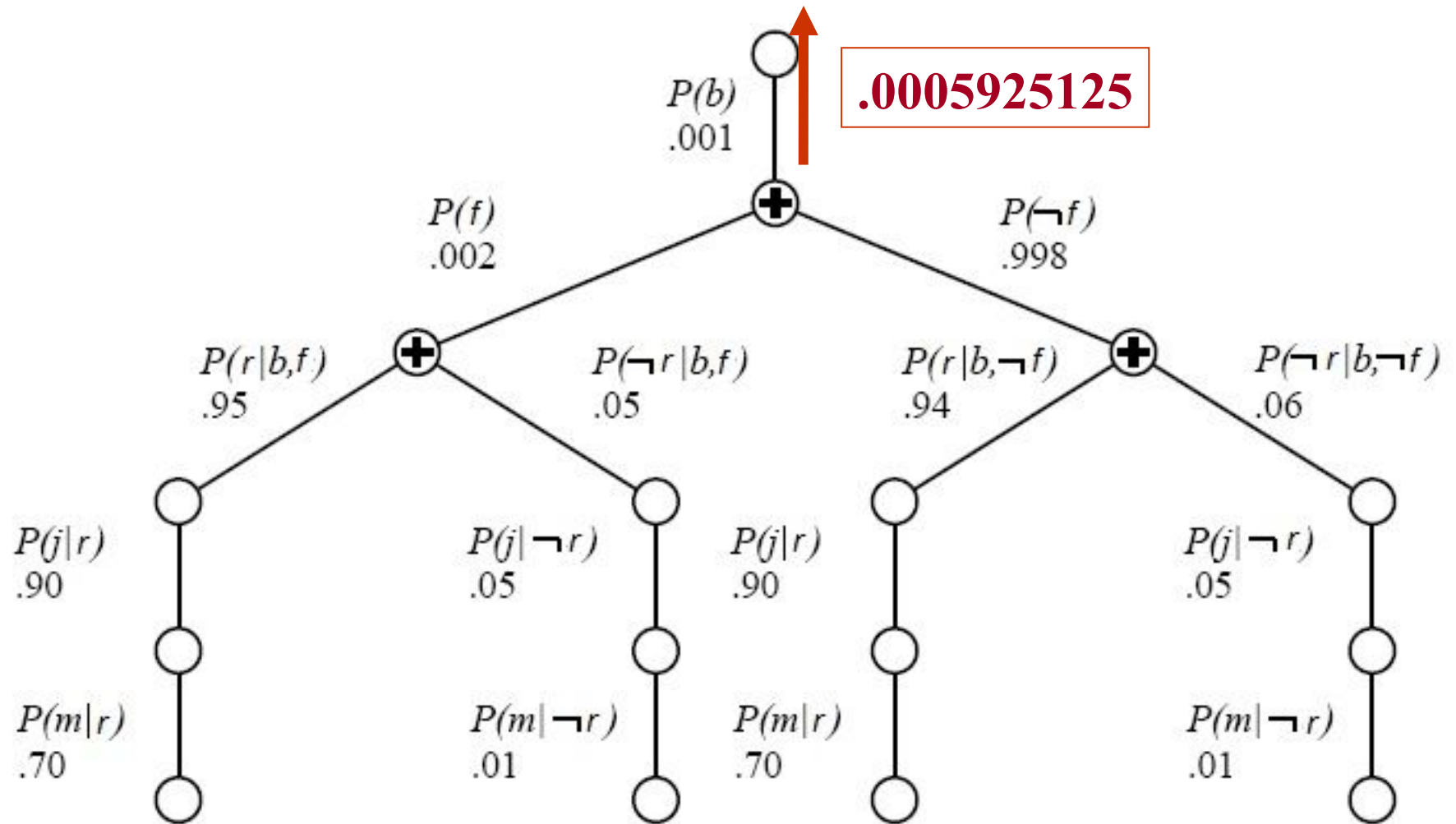
$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R P(R \mid B \ F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$



$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R P(R \mid B \ F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$



$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \Sigma_F P(F) \Sigma_R P(R \mid B \ F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$



Következtetés változók eliminálásával

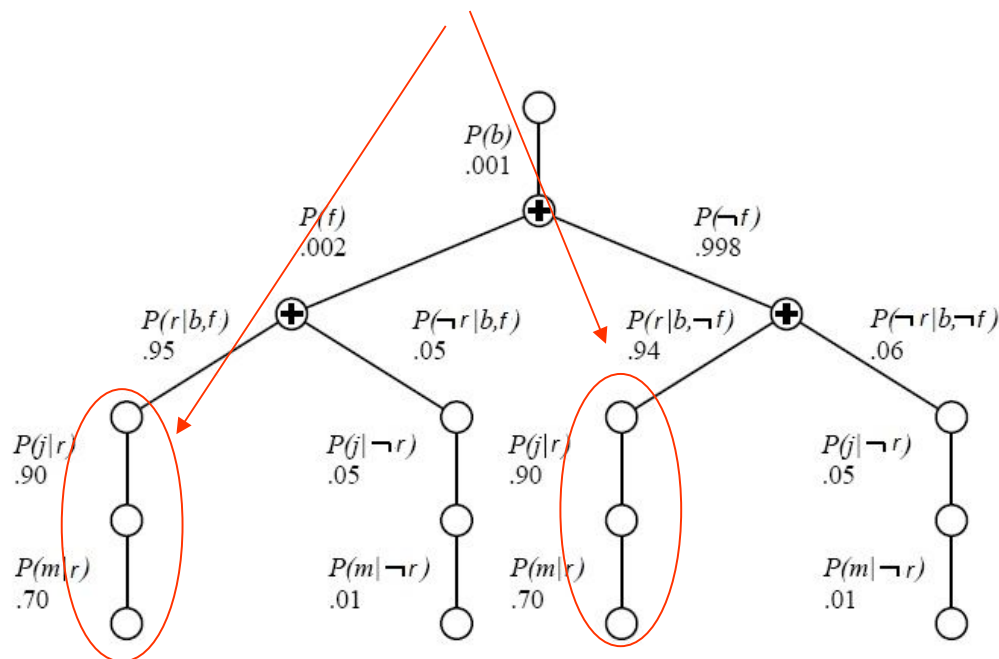
$P(B \mid J M)$

$$P(B \mid J M) = \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R P(R \mid B F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$

Kiértékelés:

- jobbról balra
- köztes eredmények tárolása

Probléma előbb: bizonyos tagok többszörös kiszámítása, pl.



Következtetés változók eliminálásával

$P(B \mid J \ M)$

$$P(B \mid J \ M) = \alpha \underbrace{P(B)}_B \underbrace{\sum_F P(F)}_F \underbrace{\sum_R P(R \mid B \ F)}_R \underbrace{P(J \mid R)}_J \underbrace{P(M \mid R)}_M$$

$$P(B \mid J \ M) = \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R P(R \mid B \ F) P(J \mid R) P(M \mid R)$$

$$= \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R P(R \mid B \ F) P(J \mid R) \mathbf{f}_M(R)$$

$$= \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R \mathbf{f}_R(R \mid B \ F) \times \mathbf{f}_J(R) \times \mathbf{f}_M(R)$$

$$= \alpha P(B) \sum_F P(F) \mathbf{f}_{RJM}(B \ F)$$

$$= \alpha P(B) \sum_F \mathbf{f}_F(F) \times \mathbf{f}_{RJM}(B \ F) \quad (\text{mátrixos}) \text{ tényezők}$$

$$= \alpha P(B) \mathbf{f}_{FRJM}(B) \quad \text{speciális szorzattal}$$

$$= \alpha \mathbf{f}_B(B) \times \mathbf{f}_{FRJM}(B)$$

$$\mathbf{f}_M(R) = \begin{pmatrix} P(M \mid R) \\ P(M \mid \neg R) \end{pmatrix}.$$

$$f(X_1, \dots, X_j, Y_1, \dots, Y_k, Z_1, \dots, Z_l) \\ = f_1(X_1, \dots, X_j, Y_1, \dots, Y_k) \times f_2(Y_1, \dots, Y_k, Z_1, \dots, Z_l)$$

A	B	f1(A,B)	B	C	f2(B,C)	A	B	C	f3(A,B,C)
T	T	0,3	T	T	0,2	T	T	T	0,3 x 0,2
T	F	0,7	T	F	0,8	T	T	F	0,3 x 0,8
F	T	0,9	F	T	0,6	T	F	T	0,7 x 0,6
F	F	0,1	F	F	0,4	T	F	F	0,7 x 0,4
						F	T	T	0,9 x 0,2
						F	T	F	0,9 x 0,8
						F	F	T	0,1 x 0,6
						F	F	F	0,1 x 0,4

Irreleváns változók eliminálása

$$P(J \mid B) = \alpha P(B) \sum_F P(F) \sum_R P(R \mid B, F) P(J \mid R) \sum_M P(M \mid R) = 1$$

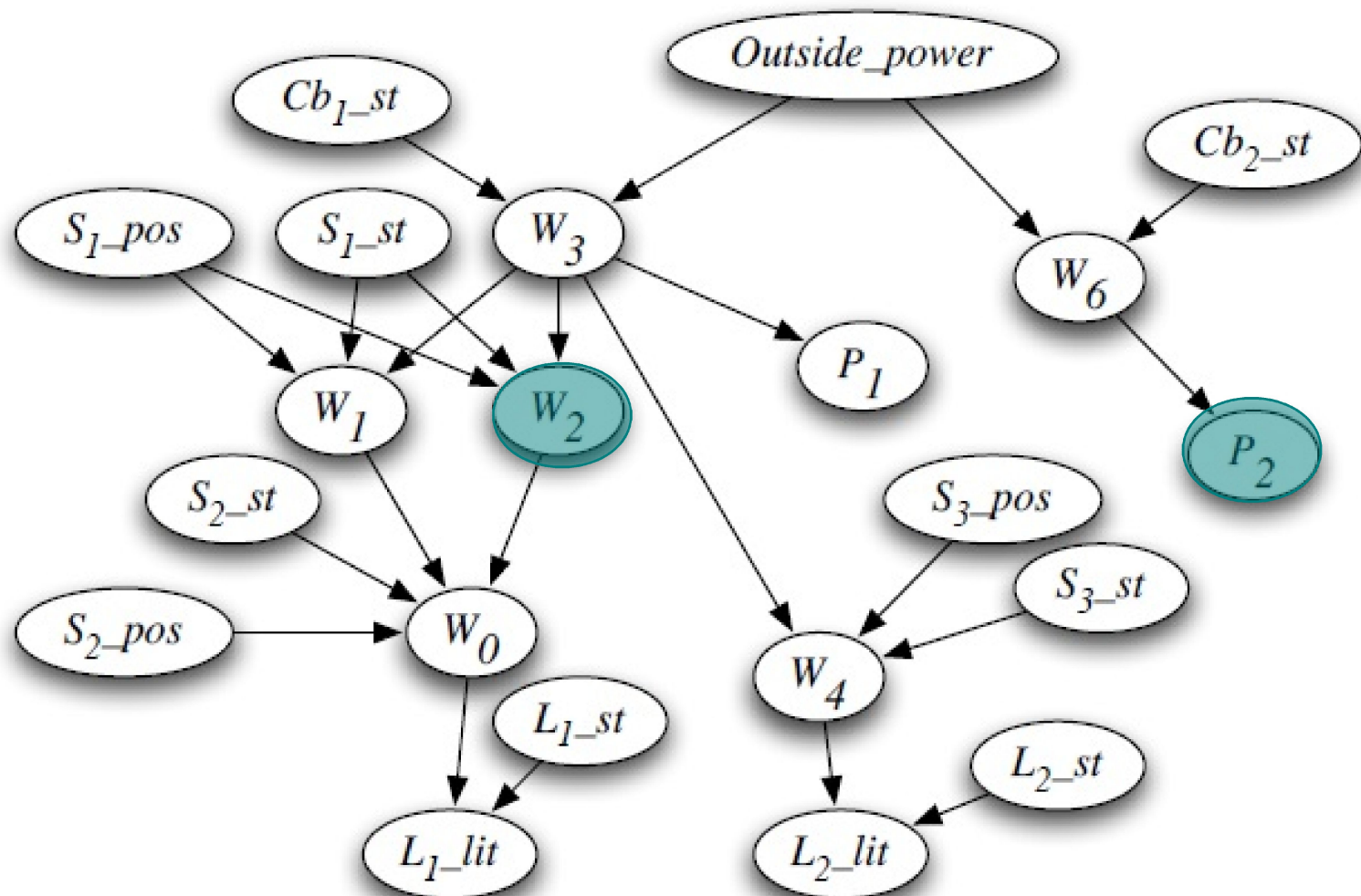
$P(\text{JánosTelefonál} \mid \text{Betörés})$ lekérdezés eredményét nem változtatja meg a MáriaHív eltávolítása a hálóból.

Általában, bármely **levél** csomópontot eltávolíthatunk, ami **nem célváltozó** vagy **nem bizonyíték** változó.

Eltávolítás után lehetnek újabb levélcsomópontok, amelyek szintén irrelevánsak lehetnek.

Minden változó, ami nem őse a célváltozónak, vagy egy bizonyíték változónak irreleváns a lekérdezésre. A változó elimináló algoritmus ezért az összes ilyen változót eltávolíthatja a lekérdezés kiértékelése előtt.

Mi a helyzet a $P(\text{Földrengés} \mid \text{Betörés})$ esetben?



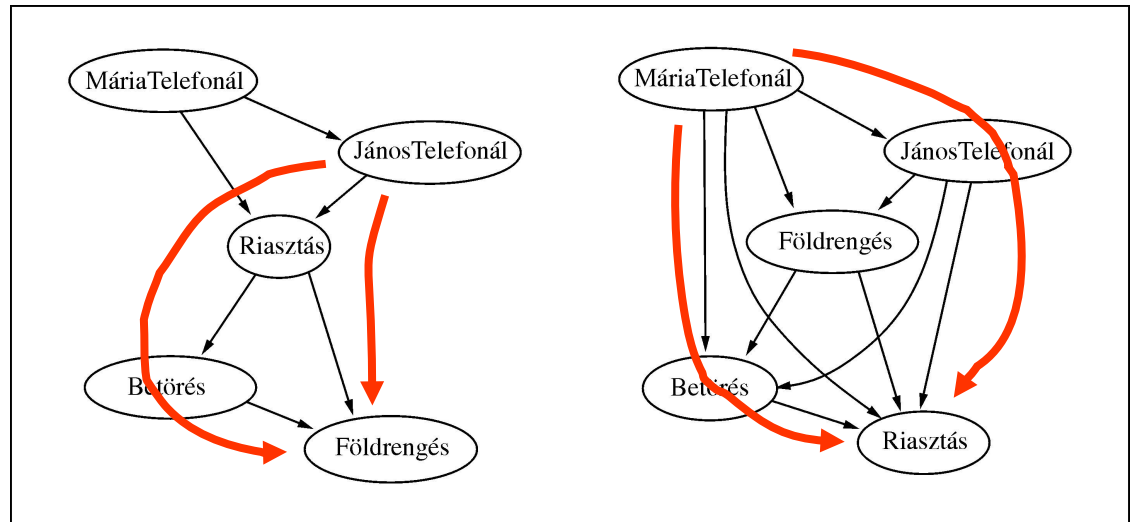
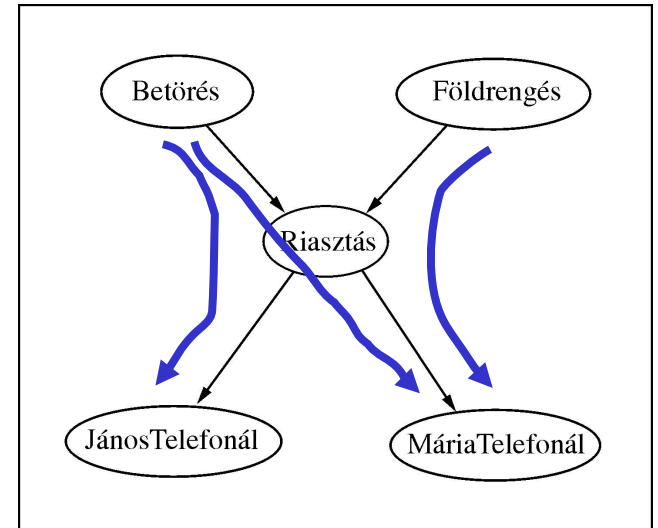
Az egzakt következtetés komplexitása

egyszeresen összekötött,

bármely két csp. között legfeljebb egyetlen egy irányítatlan út van

többszörösen összekötött

bármely két csomópont között több az út



Egy algoritmus lekérdezések megválaszolására

egyszeresen összekötött, fa gráf (polytree)

létezik lineáris komplexitású algoritmus

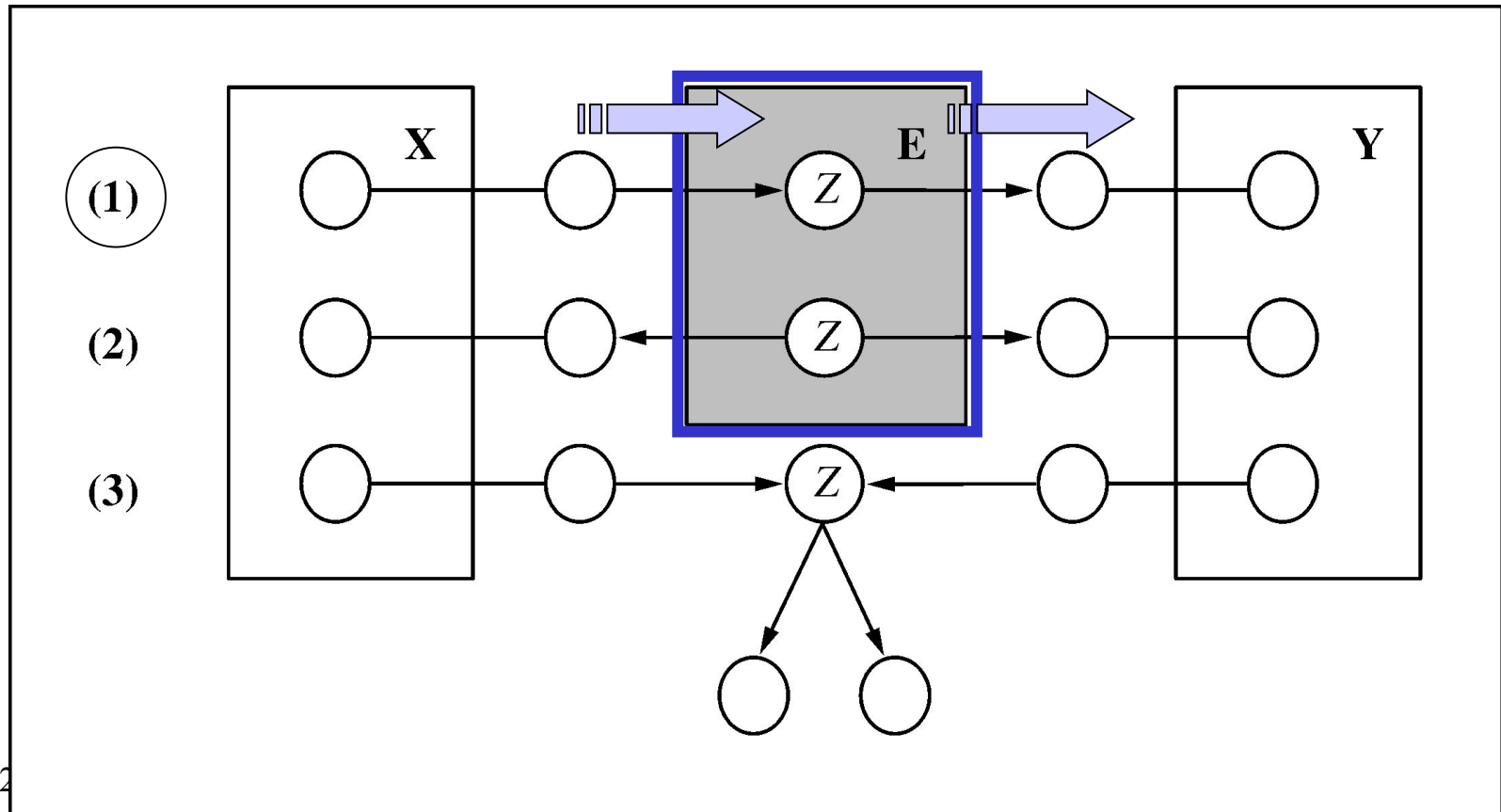
többszörösen összekötött

nem létezik zárt alakú (rekurzív) algoritmus

vagy a komplexitás megugrik (l. előbb), vagy
csak közelítő módszerek maradnak

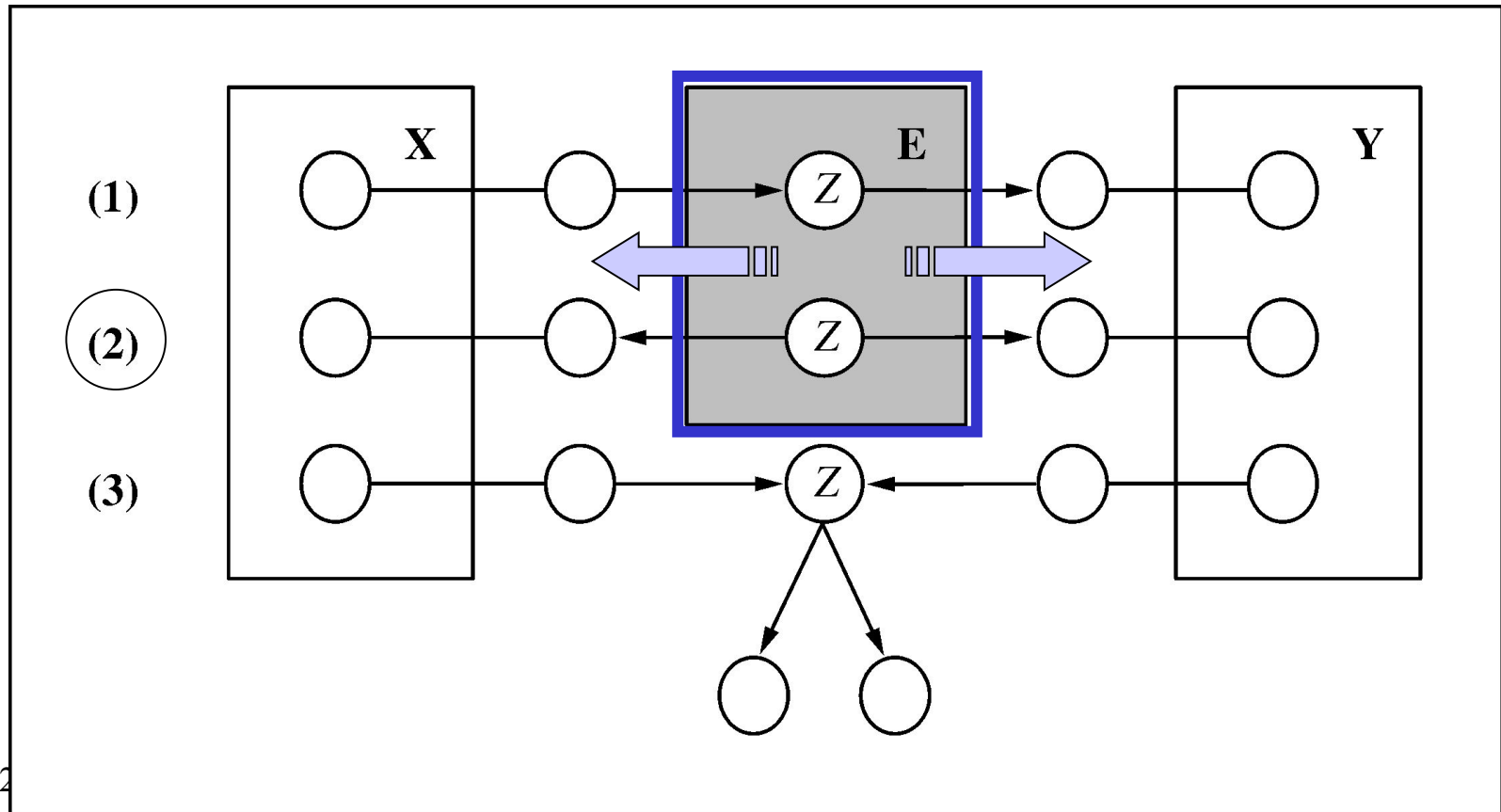
Írány-függő-elválasztás vagy d-elválasztás

Minden egy X-beli csomóponttól egy Y-beli csomópontba vezető irányítatlan út **E** által d-elválasztott, akkor **X** és **Y** feltételesen független feltéve **E** ismert.



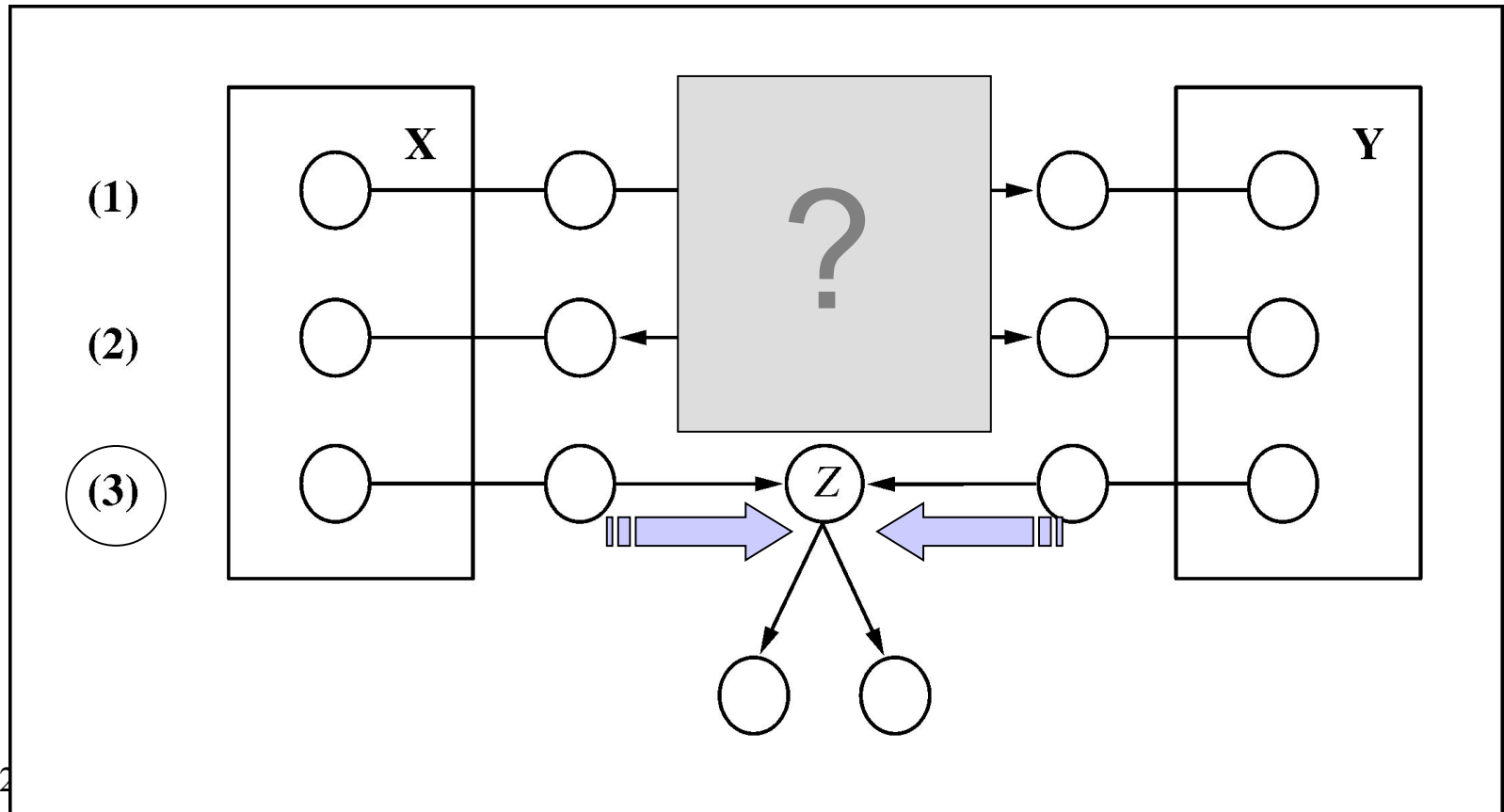
Írány-függő-elválasztás vagy d-elválasztás

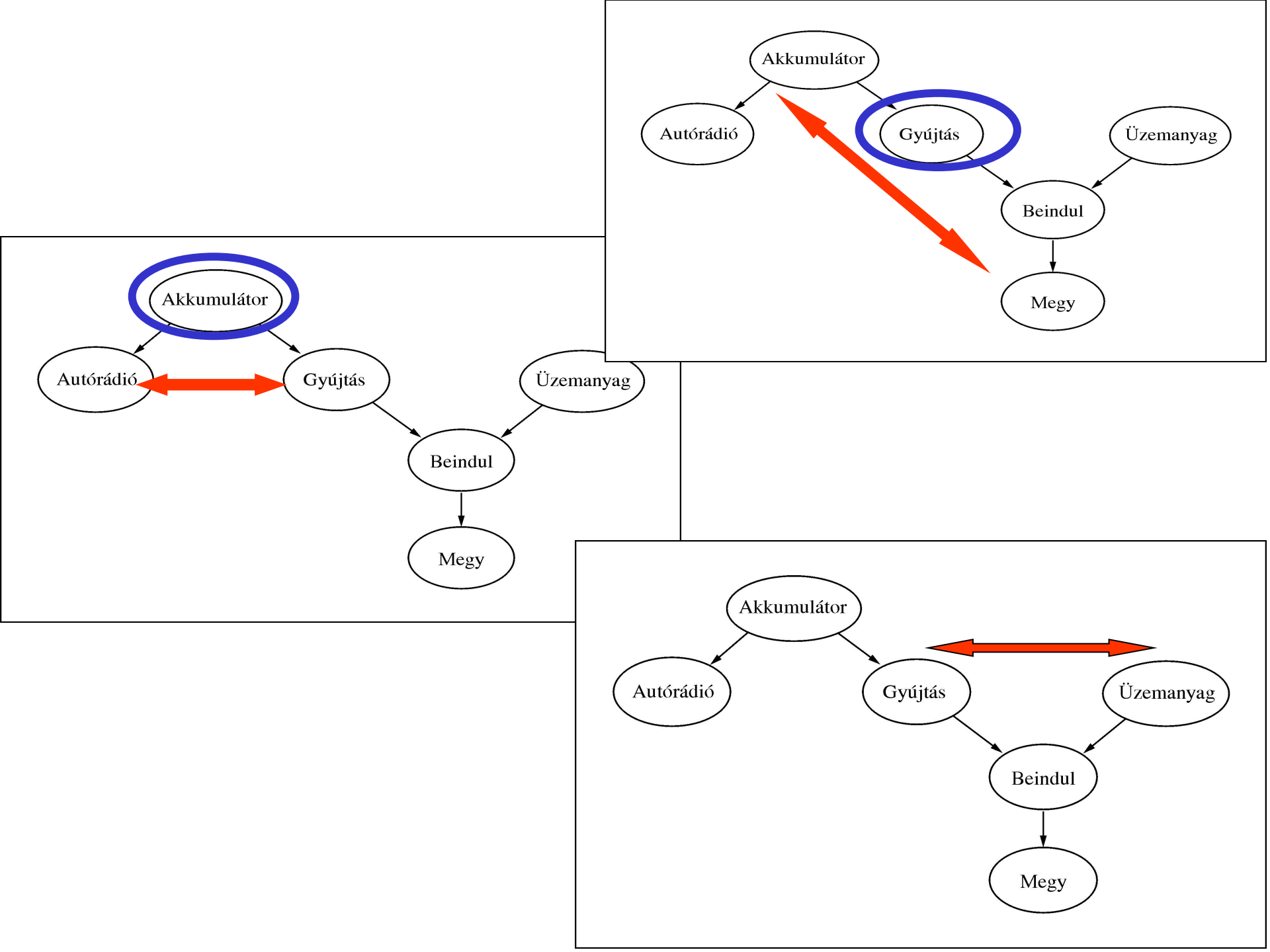
Minden egy X-beli csomóponttól egy Y-beli csomópontba vezető irányítatlan út **E** által d-elválasztott, akkor **X** és **Y** feltételesen független feltéve **E** ismert.



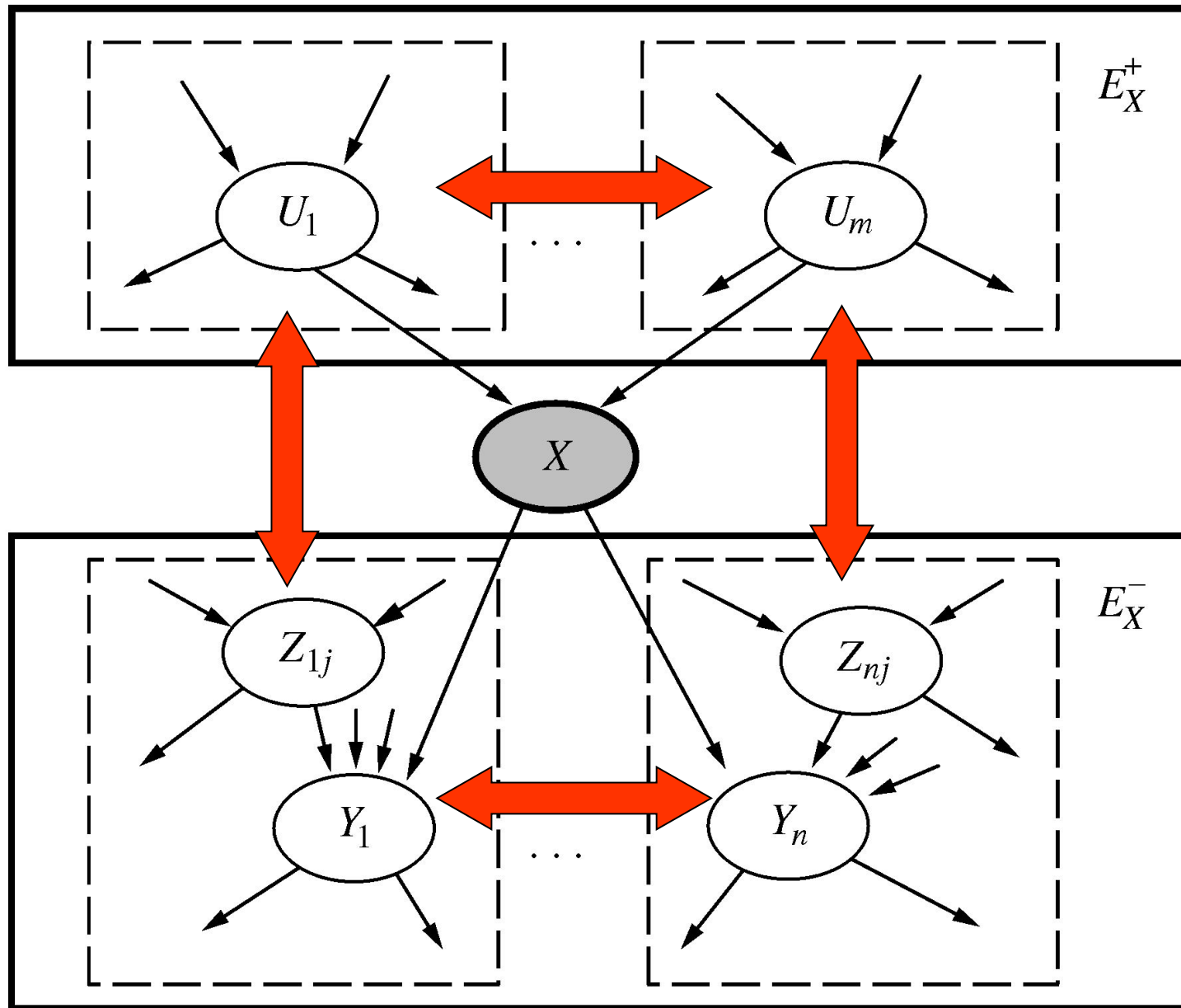
Írány-függő-elválasztás vagy d-elválasztás

Minden egy X-beli csomóponttól egy Y-beli csomópontba vezető irányítatlan út **E** által d-elválasztott, akkor **X** és **Y** feltételesen független feltéve **E** ismert.





Általános helyzet – egyszerűen összekötött



Feltételesen függetlenek

A számítás rekurzív hívásokból áll, X-ből indulva, a hálóban minden lehetséges úton haladva (fel/le).

A rekurzió leáll a:

ténycsomópontokon,

gyökércsomópontokon (szülő nélküli csomópont) és

levélcsomópontokon (gyermek nélküli csomópont).

Az algoritmus lineáris a háló csomópontjainak számában.

Ez csak azért lehetséges, mert a háló fa gráf.

Következtetés többszörösen összekötött hálókbán

Előbbi általános egzakt módszerek ...

Csoportosító, összevonós eljárások:

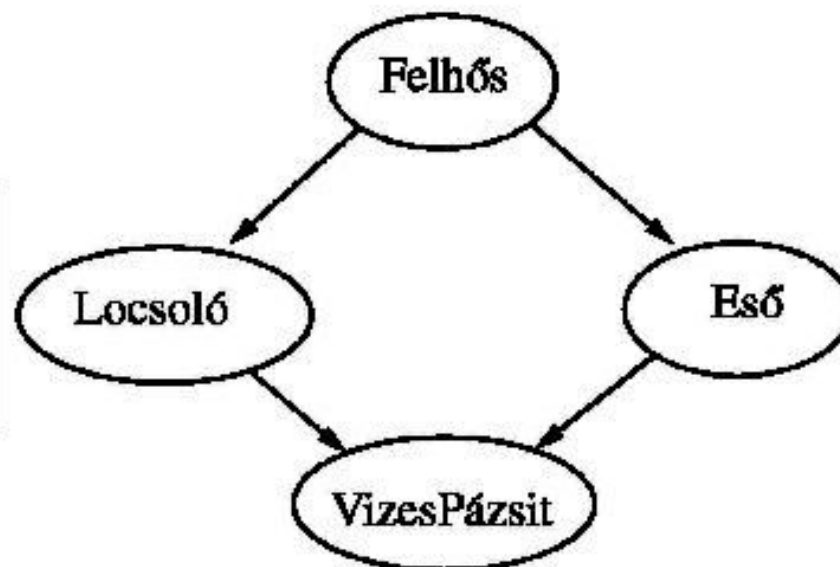
átalakítják a hálót a valószínűségek szempontjából ekvivalens (de más topológiájú) fa gráffá, a nem megfelelő csomópontokat összevonva (majd lineáris).

Sztochasztikus szimulációs eljárások:

a tárgytartomány nagyon nagy számú konkrét modelljét generálják le, ami konzisztens a valószínűségi háló által definiált eloszlással. Ez alapján az egzakt eredmények közelítését adják.

$$P(F) = 0,5$$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

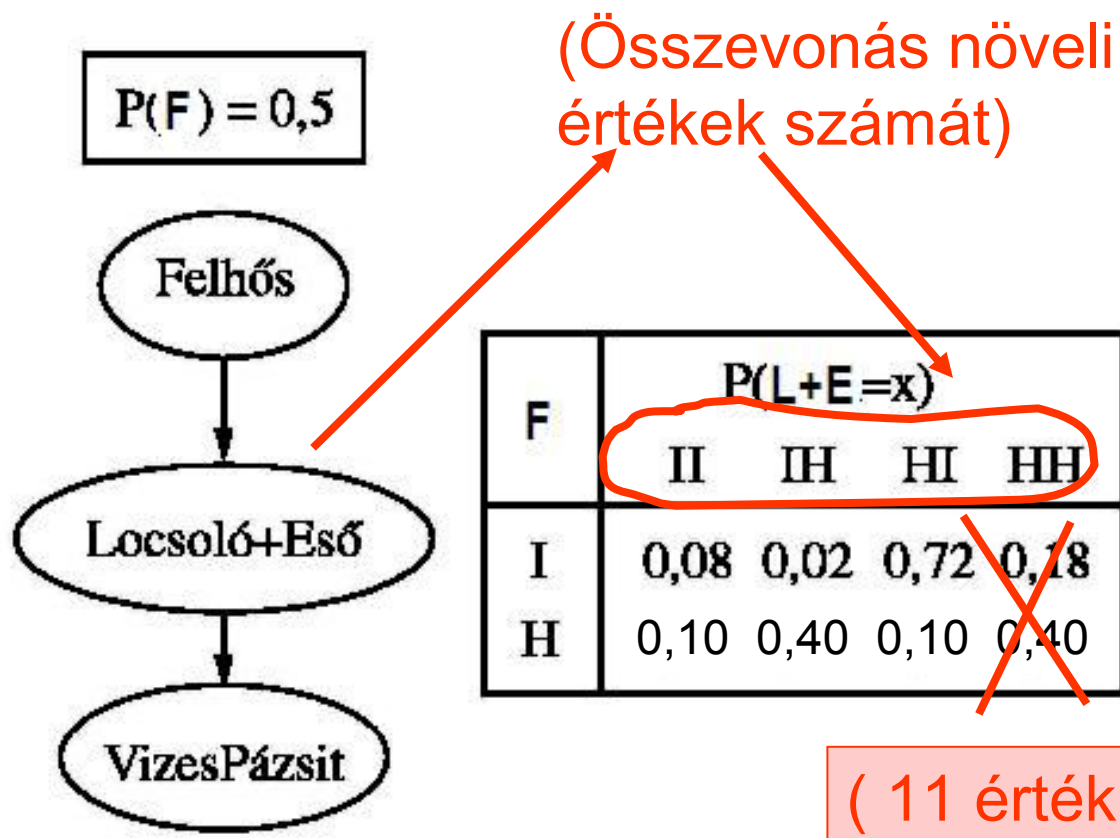


F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

(9 érték)

Összevonás



L+E		P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Következtetés egyszerűbb, de az összevonás exponenciális is lehet, ügyes összevonás komplexitásba kerül.

Közvetlen logikai mintavételezés: sztochasztikus szimuláció

Ismételten leszimuláljuk a háló által leírt világot

(háló = véletlen számgenerátor, elemi eseményeket sorsol)

a kérdéses valószínűségeket a megfelelő események előfordulási gyakoriságával becsüljük meg.

Minden szimulációs ciklusban:

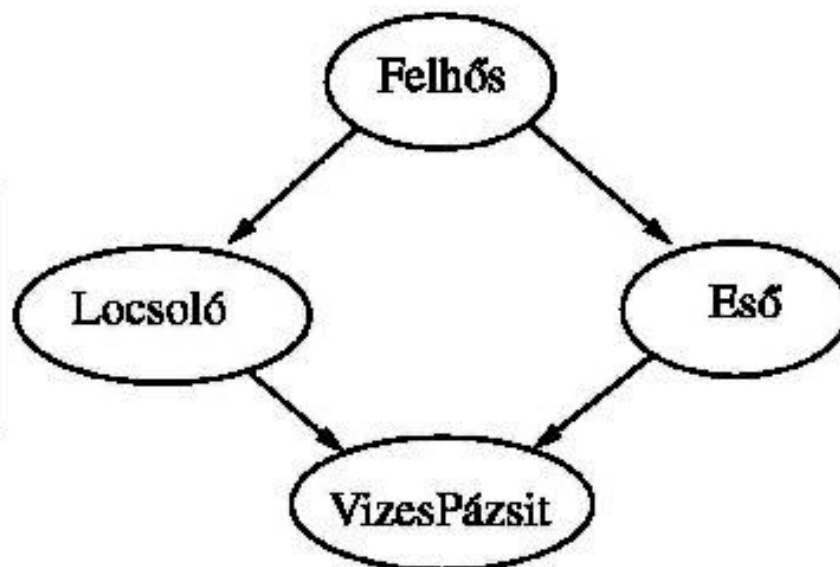
- a gyöker csomópontok értékeinek véletlen sorsolása az a priori valószínűségeinek megfelelően
- ez szülői feltétel a gyerek csomópontok számára, a gyerek sorsolásához a valószínűséget a szülői feltételhez rendelt FVT-ból választjuk
- ugyanezt tesszük lefelé haladva a hálóban

A $P(X)$ megbecsüléséhez a folyamatot sokszor megismételjük, és kiszámítjuk az esemény relatív frekvenciáját.

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50



F	P(E)
I	0,80
H	0,20

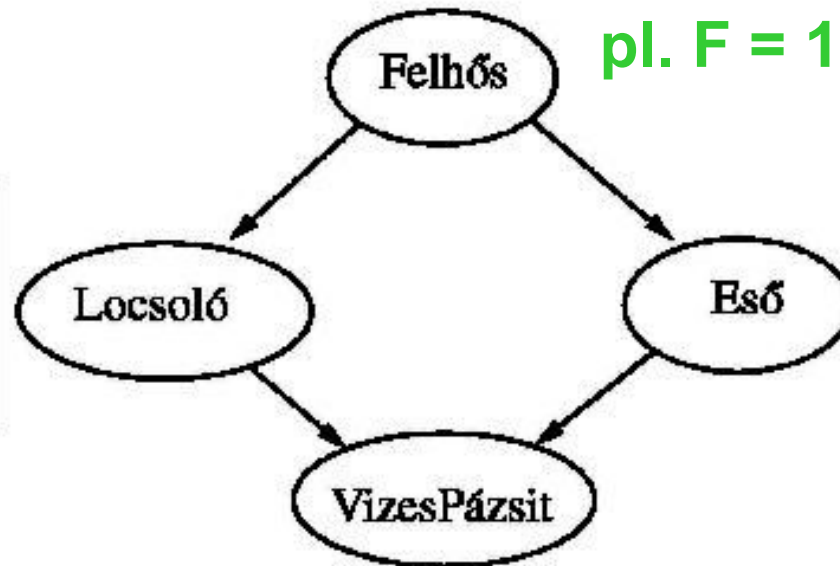
L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50



F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

$$pl. F = 1$$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

$$pl. L = 0$$

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

$$pl. F = 1$$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

$$pl. L = 0$$

Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

$$pl. F = 1$$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás $\rightarrow$ pl. L = 0

pl. E = 1 $\leftarrow$ Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

pl. $L = 0$

pl. $E = 1$

Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

pl. $F = 1$

Felhős

Locsoló

Eső

VizesPázsit

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Sorsolás

pl. $L = 0$

pl. $E = 1$

Sorsolás

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

$$pl. F = 1$$

Felhős

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

Locsoló

F	P(E)
I	0,80
H	0,20

Eső

$$Sorsolás \rightarrow pl. L = 0$$

$$pl. E = 1 \leftarrow Sorsolás$$

VizesPázsit

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

Sorsolás

$$pl. V = 1$$

Elutasító logikai mintavételezés

először a háló által megadott a priori eloszlásból generál mintákat, majd elutasítja azokat, amelyek nem illeszkednek a bizonyítékhoz.

Sorsolások száma = $Locsoló = Igaz \ N_L$ (nincs elutasítva)
 $Locsoló = Igaz$ és $Eső = Igaz \ N_{LE}$

$$P(Eső \mid Locsoló) \leftarrow N_{LE} / N_L$$

Az elutasító mintavétel legnagyobb hibája, hogy nagyon sok mintát utasít el.

Az **e** bizonyítékkal konzisztens minták aránya exponenciálisan egyre kevesebb, ahogy a bizonyíték változók száma nő (**egyre ritkább esemény**), így az eljárás egyszerűen használhatatlan komplex problémákban.

A fő probléma: ha az érdekes események igen ritkán fordulnak elő.

Pl. a következő értéket szeretnénk tudni:

$$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit} \wedge \text{Locsoló})$$

Mivel az $\text{VizesPázsit} \wedge \text{Locsoló}$ ritkán fordul elő a világban, a szimuláció során a legtöbb menetben más értékeket kapunk ezekre a tény változókra, és ezeket az eseteket **nem tudjuk felhasználni**.

Valószínűségi súlyozás

amikor tény változóhoz érünk, ahelyett, hogy véletlenül választanánk egy értéket (a feltételes valószínűségek alapján), mindig a tény változó adott kívánt értékét választjuk

(= a ritka esemény **mindig** forduljon elő!)

de felhasználjuk a feltételes valószínűségét, hogy az mennyire is valószínű.

(az így kapott hozzájárulás a relatív frekvenciához nem 1, hanem kis valószínűség, a likelihood értékek szorzata)

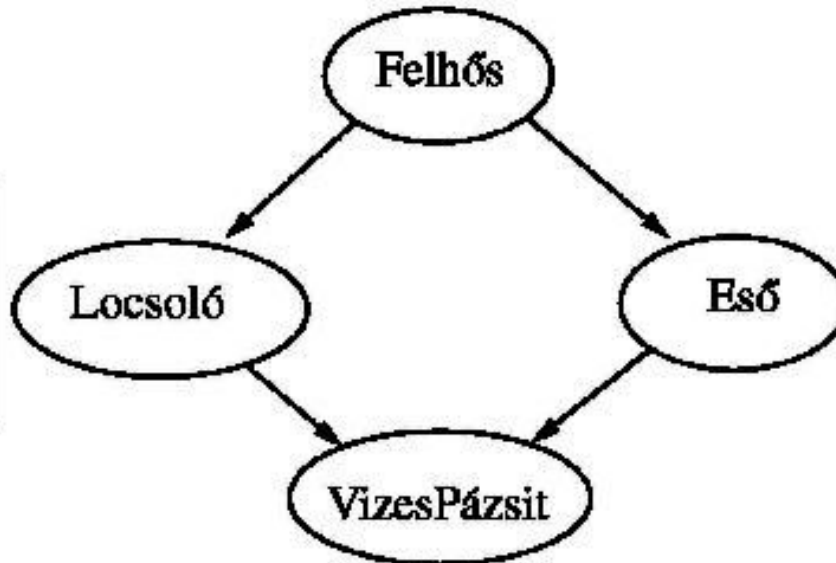
Példa:

$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$

Sorsolás

$$P(F) = 0,5$$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50



F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

$W = 1$

Példa:

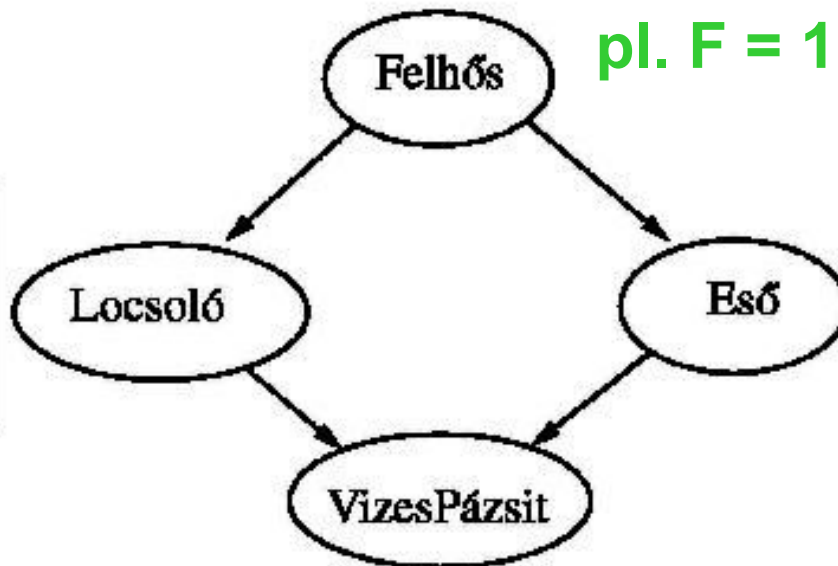
$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$

Sorsolás

$P(F) = 0,5$

pl. $F = 1$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50



F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

$W = 1$

Példa:

$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$

Sorsolás

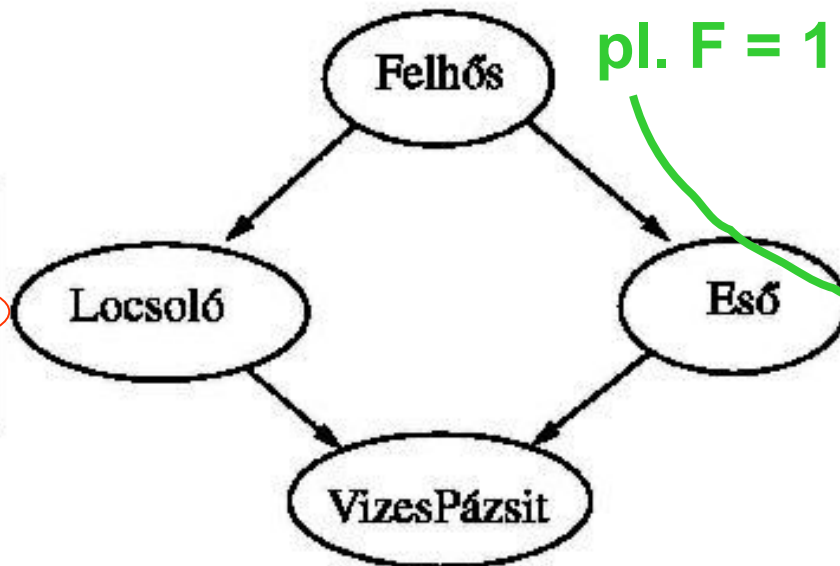
$P(F) = 0,5$

pl. $F = 1$

F	P(L)
I	0,10
H	0,50

Beállítás

$L = 1$



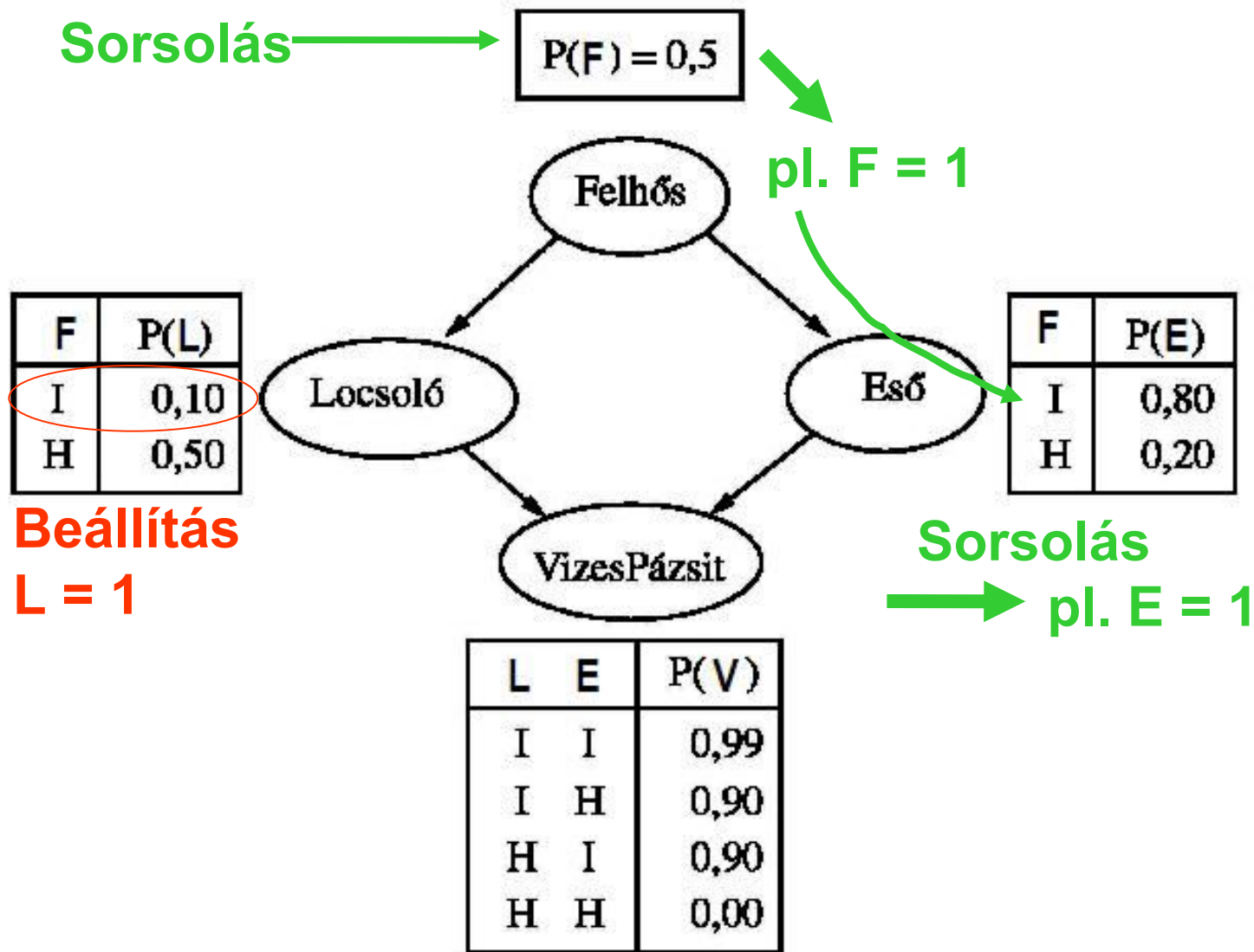
F	P(E)
I	0,80
H	0,20

L	E	P(V)
I	I	0,99
I	H	0,90
H	I	0,90
H	H	0,00

$W \leftarrow W \times P(\text{Locsoló}=\text{igaz} \mid \text{Felhős}=\text{igaz}) = 0,1.$

Példa:

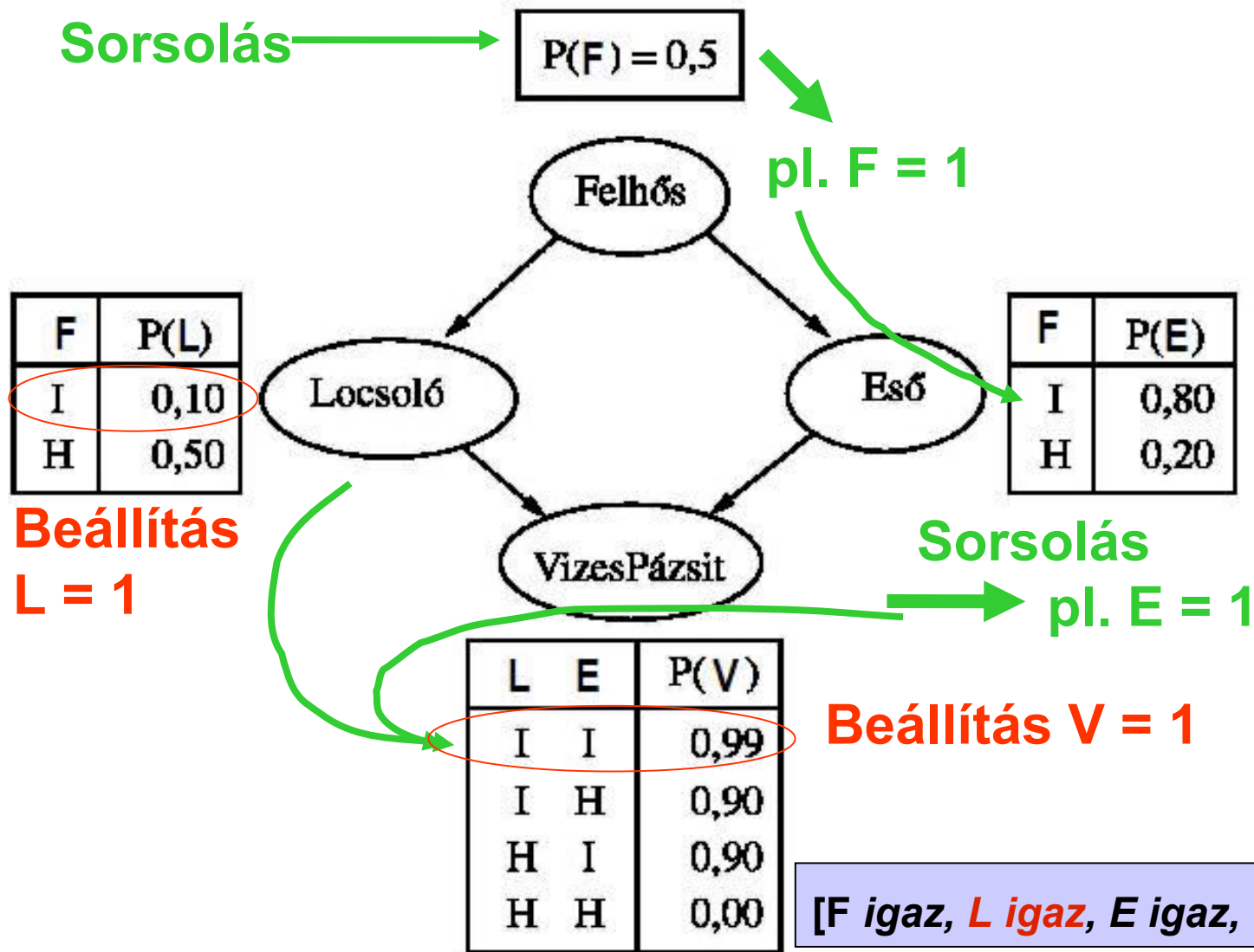
$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$



$$W \leftarrow W \times P(\text{Locsoló}=\text{igaz} \mid \text{Felhős}=\text{igaz}) = 0,1.$$

Példa:

$P(\text{Eső} \mid \text{VizesPázsit}, \text{Locsoló})$



$$W \leftarrow W \times P(\text{VizesPázsit}=\text{igaz} \mid \text{Locsoló}=\text{igaz}, \text{Esős}=\text{igaz}) = 0,099.$$

Valószínűségi súlyozás

function VALÓSZÍNŰSÉGI-SÚLYOZÁS($X, \mathbf{e}, bn, N$) **returns** $P(X|\mathbf{e})$ egy becslése

inputs: X , a lekérdezés változója

$\mathbf{e}$, a bizonyíték mint esemény

bn , egy Bayes-háló

N , a generálandó minták száma

local variables: $\mathbf{W}$, X értékeihez tartozó súlyozott számlálók vektora, kezdetben nulla

for $j = 1$ **to** N **do**

$\mathbf{x}, w \leftarrow \text{SÚLYOZOTT-MINTA}(bn)$

$\mathbf{W}[x] \leftarrow \mathbf{W}[x] + w$, ahol x az X értéke $\mathbf{x}$ -ben

return NORMALIZÁL($\mathbf{W}[X]$)

function SÚLYOZOTT-MINTA($bn, \mathbf{e}$) **returns** egy esemény és egy súly

$\mathbf{x} \leftarrow$ egy esemény n elemmel; $w \leftarrow 1$

for $i = 1$ **to** n **do**

if X_i értéke szerepel $\mathbf{e}$ -ben

then $w \leftarrow w \times P(X_i = x_i | \text{szülők}(X_i))$

else $x_i \leftarrow$ egy véletlen minta $P(X_i = x_i | \text{szülők}(X_i))$ szerint

return $\mathbf{x}, w$

$W[\text{Eső}=1] = W[\text{Eső}=1] + w$, vagy

$W[\text{Eső}=0] = W[\text{Eső}=0] + w$

$P(\text{Eső} \mid \text{Vizes}, \text{Locsoló})$

$\leftarrow W[\text{Eső}=1] / (W[\text{Eső}=1] + W[\text{Eső}=0])$

Valószínűségi súlyozás

valószínűségi súlyozás az összes generált mintát felhasználja a teljesítménye leromlik, amint a bizonyíték változók száma növekszik (a legtöbb mintának nagyon kis súlya lesz és így a súlyozott becslést főként a minták azon töredéke határozza meg, amelyek egy elenyésző valószínűségnél jobban illeszkednek a bizonyítékokhoz)

gyorsabban konvergál, mint a logikai mintavételezés
igen nagy méretű valószínűségi hálókat is képes kezelni
probléma: pontos valószínűség kis valószínűségű eseményekre
= **hosszú idő**
egy adott pontossághoz szükséges futási idő **fordítottan arányos** az esemény valószínűségével

Kritikus események: ... egy nukleáris reaktor leolvadása egy adott napon $P \cong 0$, de nagy különbség van 10^{-5} és 10^{-10} között, így ekkor is pontos értékeket kell kapnunk