Megjegyzés: a 9. előadási órán (2014. április 9-én) korábbi zárthelyi feladatok szerepeltek, és az ezekhez tartozó elméleti vonatkozások átismétlésére került sor.

További megjegyzések a 8. előadáson elhangzottakhoz:

1. Az $x = Ty$ jel-transzformáció értelmezése a bázis/reciprok bázis rendszerrel: Először írjuk fel, hogyan képzeljük el jel létrejöttét. (Lásd ehhez a 45. ábrát is.)

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0(0) & c_1(0) & \cdots & c_{N-1}(0) \\ c_0(1) & c_1(1) & \cdots & c_{N-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0(N-1) & c_1(N-1) & \cdots & c_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \tag{201}$$

ahol az x vektor elemei a mátrix oszlopaiként megjelenő bázis vektorok súlytényezői. A jel-transzformáció célja a jelből (y vektor) kinyerni ezeket a súlytényezőket. Ennek módja az y vektor szorzása a

$$T = \begin{bmatrix} g_0^T \\ g_1^T \\ \vdots \\ g_{N-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0(0) & g_0(1) & \cdots & g_0(N-1) \\ g_1(0) & g_1(1) & \cdots & g_1(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}(0) & g_{N-1}(1) & \cdots & g_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \tag{202}$$

mátrixszal. Az eredmény - (201) és (202) összevetésével – éppen az x vektor. A jel-transzformáció mátrixának sorai tehát a reciprok-bázis vektorok.

2. A 45. ábrán szereplő megfigyelővel a „megfigyelés” a első N lépés után folytatható, a kapott eredmény mindig az utolsó N mintára vonatkozik (Csúszó-ablakos feldolgozás). Ehhez

$$\begin{matrix} c(N) = c(0) \\ g(N) = g(0) \end{matrix}, \text{ ill. } \begin{matrix} c(k) = c(k \bmod N) \\ g(k) = g(k \bmod N) \end{matrix}.$$

3. Az ábra szerinti sémában tetszőleges diszkrét transzformáció megvalósítható csúszó-ablak (rekurzív) jelleggel. A számításigény N hosszú blokkra $\sim N^2$-tel arányos, egy újabb lépés számításigénye pedig $\sim N$-tel.

4. Gyakran használjuk a diszkrét Fourier transzformáció párt, amelynek összefüggései:

$$x(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn},\ m = 0,1,\ldots,N-1, \text{ illetve } y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{j\frac{2\pi}{N}mn},\ n = 0,1,\ldots,N-1.$$

Itt $y(n)$ a feldolgozandó diszkrét időfüggvény mintáit jelöli, $x(m)$ pedig a harmonikus komponensek súlytényezőit. A megfigyelő sémával megvalósítható rekurzív diszkrét Fourier transzformációt RDFT = Rekurzív DFT módon hivatkozzuk.

5. A késleltető elemből, konstanssal történő szorzásból és az összeadásból felépülő, időben diszkrét hálózatok sajátfüggvénye a komplex exponenciális. Ebből fakadóan az RDFT másképpen is megvalósítható.

6. A folytathatóság értelmezhető általánosabban: az első N lépés után a bázis/reciprok bázis vektorok első elemét olyan értékekkel helyettesítjük, hogy megmaradjanak a bázis/reciprok bázis rendszerekre vonatkozó tulajdonságok. Példa: nem-harmonikus sin/cos komponensekre bontás.

Keverés-integrálás-keverés helyett sávszűrés: Rajzoljuk át a 45. ábra belső részegységét a 46. ábrán látható módon. Toljuk el a bázisvektor-elemmel történő szorzást a késleltető elem visszacsatoló hurkába (lásd 47. ábra). Egy további lépésként toljuk tovább ezt a szorzást a hurokban, amivel a DFT esetén olyan elrendezést kapunk, amely több előnyös tulajdonsággal rendelkezik (lásd 48. ábra). Vegyük észre, hogy ezzel az átalakítással az elrendezés független lett az *n* diszkrét időváltozótól, mert a DFT esetében

$$\frac{c_m(n+1)}{c_m(n)} = e^{j\frac{2\pi}{N}m} = z_m \text{, ill. } g_m(n)c_m(n) = \frac{1}{N}$$

Az átalakítással létrejött részegységet rezonátornak nevezzük, mert egyetlen (komplex) pólusa az egységsugarú körön, és ezzel a stabilitás határán helyezkedik el. Egy ilyennek az átviteli függvénye az *m*-edik csatorna esetében:

$$H_m(z) = \frac{1}{N}\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \tag{203}$$

A megfigyelő egyetlen csatornájának átviteli függvénye:

$$T_m(z) = \frac{H_m(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N}\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} \tag{204}$$

Fontos tulajdonság, hogy $T_m(z)\big|_{z=z_m} = 1$, ill. $T_m(z)\big|_{z=z_n, z\neq z_m} = 0$. A rezonátor pólusnak megfelelő frekvencián a hurokerősítés végtelen. az átvitelt a visszacsatoló hálózat átvitele határozza meg, ami a jelen esetben 1. Ebből adódóan ezeken a frekvenciákon kedvező az elrendezés paraméterérzékenysége.

A megfigyelő csatornáinak összegzésével létrejövő kimenetre vonatkozó átviteli függvény:

$$H_P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} \tag{205}$$

Fontos tulajdonság, hogy $H_P(z)\big|_{z=z_n} = 1$. Mivel ez a megfigyelő *N* lépésben konvergált, és utána már hibátlanul előállítja a bemenőjelet, ezért $H_P(z) = z^{-N}$ kell, hogy legyen. A (205) összefüggés számlálóját és nevezőjét is szorozva $\prod_{n=0}^{N-1}(1 - z_n z^{-1}) = 1 - z^{-N}$ tényezővel

$$H_P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N}(1 - z^{-N})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{(1 - z^{-N}) + \underbrace{\frac{1}{N}(1 - z^{-N})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}_{z^{-N}}} = z^{-N} \tag{206}$$

A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1-z_n z^{-1}}=\sum_{n=0}^{N-1}(z_n z^{-1}+(z_n z^{-1})^2+(z_n z^{-1})^3+\ldots=N(z^{-N}+(z^{-N})^2+(z^{-N})^3+\ldots)=N\,\frac{z^{-N}}{1-z^{-N}},$$

mivel az *N*-edik egységgyökök (és hatványaik) összege a *N*-edik hatvány kivételével nulla.

A (206) összefüggés vizsgálata azt mutatja, hogy $H_P(z)$ alternatív megvalósítása a 49. ábrán látható elrendezés, ahol az *m*-edik csatorna átviteli függvénye:

$$T_m(z)=\frac{1}{N}(1-z^{-N})\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}, \qquad (207)$$

és amelynek összegzett átviteli függvénye:

$$H_P(z)=\frac{1}{N}(1-z^{-N})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1-z_n z^{-1}}=z^{-N}\,. \qquad (208)$$

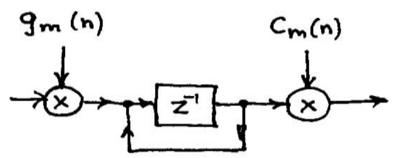
Megjegyzések:

1. A (207) összefüggés *m*=0 esetén ($z_0=1$) megegyezik a csúszó ablakos átlagoló átviteli függvényével.
2. A (207) összefüggés a 42. ábrán látható amplitúdó-karakterisztikájú szűrőt eredményez azzal a különbséggel, hogy a sávközepe nem nulla frekvencián, hanem a z_m gyöktényező által kijelölt frekvencián van. Ez a frekvencia a mintavételi frekvencia *m*/*N*-szeresénél van. A szűrő a *N* szélességű ablakra nézve periodikus jelek komponenseit, a *m*-edik kivételével, tökéletesen kiszűrik, mert a harmonikus frekvencia pozíciókban a számláló átvitele nulla.
3. A (207) összefüggés véges impulzusválaszú szűrőt (csúszó ablakos szűrőt) valósít meg, mert számlálója osztható a nevezőjével. Számlálója az ún. fésűs szűrőt valósítja meg, amelynek *m* indexű fogát a pólus „kitöri”. A számláló megvalósítása nagyon egyszerű, amit korán felismertek.
4. A 49. ábrán látható struktúrát Lagrange struktúrának nevezik, mert a Lagrange interpoláció frekvenciatartománybeli megvalósítására alkalmas.
5. A Lagrange struktúrát véges impulzusválaszú (FIR) szűrők megvalósítására (is) használják az alábbi összefüggés szerint:

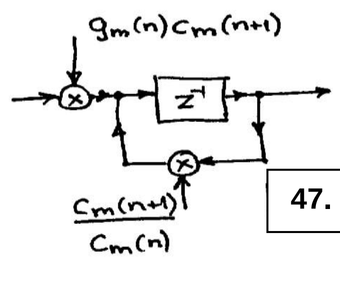
   $$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}w_n T_n(z), \qquad (209)$$

   azaz az egyes csatornakimenetek lineáris kombinációját képezzük. Mivel $w_n=H(z_n)$ módon határozható meg, az eljárását frekvencia-mintavételi eljárásnak nevezik.
6. A (207) összefüggés a stabilitás határán lévő rendszert ír le, mert rezonátort tartalmaz, amely bemeneti jel nélkül is képes kimeneti jelet produkálni, ha nullától különböző kezdeti értékről indítjuk a működését. A pólus pozíció pontos beállítása numerikus problémákat vet fel: a pólus-zérus kiejtés nem lesz tökéletes.
7. A numerikus/stabilitási problémák csökkentése érdekében felvethető megoldások: (a) az $1-z^{-N}$ polinom helyett $\prod_{n=0}^{N-1}(1-z_n z^{-1})$ valósítandó meg, mégpedig azonos módon, mint a pólusokat. A nemideális pólusok kiejtésére egy hasonlóan nemideális zérus alkalmazásával keríthetünk sort, (b) Megfigyelő elrendezést alkalmazunk, ahol az egymást kiejtő zérust és pólust ugyanaz a hardver valósítja meg.

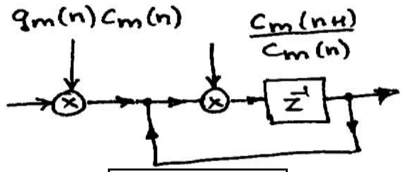
8. A megfigyelő alapú struktúra kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkezik, mint a Lagrange struktúra. Mint a későbbiekben látni fogjuk, miközben minden olyan feladat ellátásra alkalmas, amire a Lagrange struktúrát kitalálták, számos egyéb lehetőséget is kínál: (a) Lagrange interpoláció tetszőleges (de különböző) rezonátor pólusok esetében, (b) tetszőleges átviteli függvény pólus megvalósítása.
9. Az eddigiekben tárgyalt átviteli függvények mind valós együtthatósak, ill. valós együtthatós formára hozhatók. Ezzel együtt jár, hogy a gyökök vagy valósak vagy konjugált komplex párban jelentkeznek. A z_m komplex rezonátor pólusnak a $z_m^* = 1/z_m = z_m^{-1}$ konjugáltja mindig fellehető. Ezzel az jár, hogy a függvényeket a $-\pi \le \frac{2\pi}{N} m \le \pi$ tartományban, illetve a $-f_M/2 \le \frac{m}{N} f_M \le f_M/2$ értelmezzük, ahol f_M a mintavételi frekvencia, *m* pedig a rezonátor pozíciók azonosítója: $-N/2 \le m < N/2$.
10. A valóságban másodfokú, valós együtthatós rezonátorokkal érdemes dolgozni, amelyekhez úgy jutunk el, hogy a konjugált komplex póluspárokkal rendelkező csatornafüggvényeket (a) összeadjuk, ekkor mindkét csatorna átvitele (egymással megegyező) reális részének kétszeresét kapjuk az összegzett csatorna kimenetén, (b) kivonjuk, ekkor mindkét csatorna átvitele (egymástól csak előjelben különböző) képzetes részének kétszeresét kapjuk a két csatorna különbségeként.
11. A (207) összefüggéssel leírt elrendezésbe nem épül be a jelet generáló rendszer modellje, ilyen értelemben az evvel történő feldolgozás nem tekinthető modell alapúnak.
12. A 100%-ban negatív visszacsatolású rezonátor-struktúra kedvező tulajdonságai analógiába hozhatóak a hasonlóképpen visszacsatolt műveleti erősítő tulajdonságaival: az igen nagy hurokerősítés nagy pontosságot tesz lehetővé.



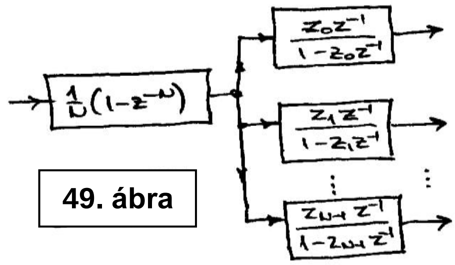
46. ábra



47. ábra



48. ábra



49. ábra