Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Méréstechnika és Információs rendszerek Tanszék

SEM – Strukturális egyenlet modellezés (Structural Equation Modeling)

Előadó: Dr. Hullám Gábor

MŰEGYETEM 1782

Kauzalitást leíró nyelvek a társadalomtudományokban

- Structural equation modeling (SEM)
  - Wright (1921), Haavelmo (1943)
- Neyman–Rubin potential-outcome model
  - Neyman (1923), Rubin (1974)

  - Matematikailag a két modellezési módszer ekvivalens
  - Használatban és értelmezésben jelentős eltérések vannak

SEM

- **Eredeti célja**: kvalitatív ok-okozat kapcsolat összekötése a kvantitatív statisztikai mérőszámokkal

  = kauzális kapcsolatok erősségének kvantitatív leírása

- **Jelenleg**: a kauzális értelmezést sokszor inkább kerülik

SEM általános alapegyenlet

$$x_i = f_i(pa_i, \varepsilon_i) \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ahol

- x_i az X_i változó egy adott értéke
- pa_i (parents) azon változók értékeit takarja, melyek X_i-nek közvetlen kiváltó okai (gráfon ábrázolva szülő csomópontjai X_i-nek)
- ε_i a hiba, ami a figyelmen kívül hagyott faktorok miatt lép fel

SEM lineáris alapegyenlet

$$X_i = \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} X_k + \varepsilon_i \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ahol azon X_k változók felelnek meg a Pa_i-nak az előző egyenletben, amelyek koefficiense nem 0.

Ilyen egyenletek egy halmaza **kauzális modell**nek nevezhető, ha minden egyenlet egy folyamatot (mechanizmust) ír le, amely meghatározza X_i értékét.

Kauzális diagram

Egy *G* gráfot kauzális diagramnak nevezünk, ha

- Csomópontjai a változók
- A csomópontok között irányított élek vezetnek minden Pa_i –ból X_i -be
- Kétirányú éllel van összekötve minden olyan X_i, melyek ε_i hibatényezői függenek egymástól

Markov Modell

Egy kauzális modell **Markov modell**, ha

- A leírására szolgáló *G* gráf DAG
- ε_i hibatényezők kölcsönösen függetlenek egymástól

Ekkor, ha ε_i-ről feltételezzük, hogy többdimenziós normális eloszlást vesznek fel,

- akkor ez X_i-kre is igaz
- X_i leírható **korrelációs koefficiensek** segítségével

Parciális korrelációk szerepe Markov modelleknél

További következmények:

- Egy parciális korreláció $\rho_{XY.Z}$ akkor és csak akkor 0, ha $(X \perp\!\!\!\perp Y|Z)$ (azaz X független Y-tól, feltéve Z-t) teljesül az eloszlásra nézve.
- Bármely Markov modellnél, amely reprezentálható egy G DAG struktúrával:
  - Egy parciális korreláció $\rho_{XY.Z}$ akkor 0, ha a gráfban X-et Y-tól d-szeparálja Z, függetlenül a modell paramétereitől.
  - Más esetben nem 0 a parciális korreláció

Struktúra és strukturális paraméterek azonosítása

- Parciális korreláció számítások alapján megállapítható, mely élek hiányoznak a DAG-ból, de ez nem elég.
- Problémát jelenthet az élek irányának meghatározása:
  - Ekvivalens modellek
  - Apriori kauzális tudás (ha van) eltérhet az adat által tükrözött kapcsolatoktól

Struktúra és strukturális paraméterek azonosítása

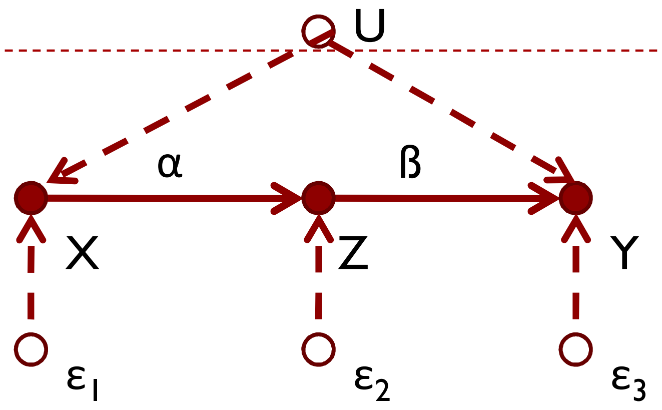
A számszerűsített kauzális hatás (X->Y) nem más, mint az Y-hoz tartozó strukturális egyenletben szereplő X változó együtthatója.

(Adott d-szeparációs feltételek esetén a parciális korrelációk alapján megadható:

- A direkt kauzális hatás (Single-door kritérium)
- Az teljes kauzális hatás (Back-door kritérium)
- A parciális kauzális hatás

)

Példa



- $x = u + \varepsilon_1$
- $z = \alpha x + \varepsilon_2$
- $y = \beta z + \gamma u + \varepsilon_3$

- Ahol U, ε_1 ε_2 ε_3 nem korrelált, nulla várhatóértékű zavaró tényezőket jelölnek

- $\beta = r_{YZ.X}$
- $\alpha = r_{ZX}$
- $\gamma = r_{YX} - \alpha\beta$

SEM intervenciós értelmezése

Az $y = \beta x + \varepsilon$ egy strukturális egyenlet, ha a következőképpen értelmezhető:

- Egy ideális kísérlet folyamán beállítjuk X változó értékét x-re, továbbá $\boldsymbol{Z}$ ($X, Y \notin Z$) változó halmaz értékét $\mathbf{z}$-re.
- Ekkor Y értéke, azaz y, a $\beta x + \varepsilon$ összefüggés alapján határozható meg, ahol ε nem függvénye x és $\mathbf{z}$ beállításoknak.
- $P(y \mid do(x), do(\mathbf{z})) = P(y \mid do(x))$, azaz y a $\mathbf{z}$ beállításokra invariáns

Strukturális paraméterek intervenciós értelmezése

$y = ßx + \varepsilon$ egyenletből a ß együttható értelmezése:

- *Y* várható értéke változásának mértéke egy olyan kísérletben, ahol *X* változó egy adott *x* értékre lett állítva, azaz
- $ß = \partial \backslash \partial x \; E[\, Y \mid do(x)]$

Mindezek alapján az ε hiba:

- $\varepsilon = y - E[\, Y \mid do(x)]$