Kooperatív játékok és koalicióképzés,

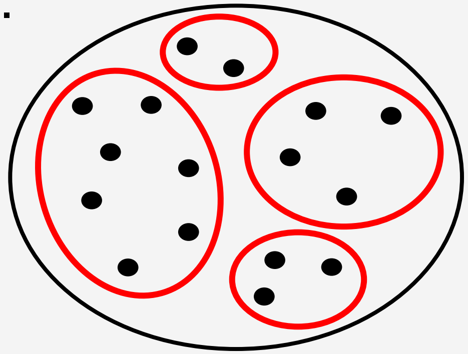
avagy érdekből összefogás

Talal Rahwan, Computational Coalition Formation fóliái nyomán

Kooperatív játékok

Ágensek profitálnak az együttműködésből, részesülnek a csoport (**koalíció**) nyereségéből a magánzáshoz képest.
Lehetőség van arra, hogy az együttműködés érdekében kötelező érvényű megállapodásokat megkössenek.

Ágenscsoport együtt cselekszik.



Teendők:

Optimális koalícióstruktúra megalkotása.
Koalíciós haszon felosztása a koalíció tagjai között.

Tipikus célkitűzés (a játék megoldása), hogy a felosztás legyen **tisztességes** (minden ágens haszna megfeleljen a játékbeli súlyának) **stabil** (olyan részcsoport nincs, akik profitálnának a koalícióból kilépve), és ehhez:

- Milyen koalíciókat kellene létesíteni?
- Hogyan kellene felosztani a kifizetést a koalíció tagjai között?

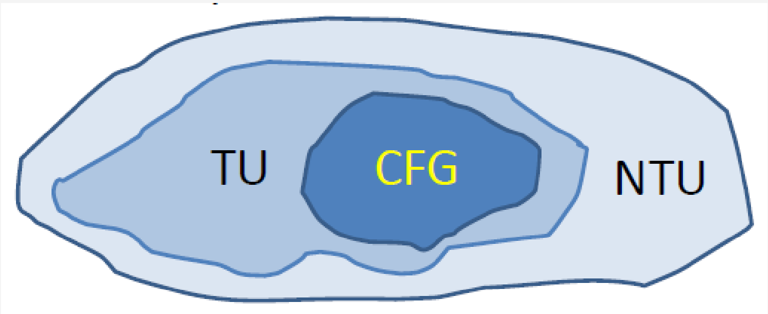
Hatással van-e egy koalició más koaliciókra?
Egy ágens adhatja-e át hasznának egy részét másoknak?

Átváltható hasznosságú játék - **Transferable Utility (TU) Game**
a csoport egésze valamilyen hasznosságot kap, amit aztán fel lehet osztani a csoport tagjai között

Nem átváltható hasznosságú játék - **Non-Transferable Utility (NTU) Game**
A csoportos cselekvés direkt módon hasznot jelent a csoport tagjainak

Koaliciós függvénnyel megadott játék - Characteristic Function Game (CFG) egy-egy koalició nyeresége csakis e koalició cselekvéseitől függ.
Az ilyen játékban egy koalició a legjobb cselekvése révén nyert haszonnal azonosítható.

Particiós függvénnyel megadott játék - Partition Function Game (PFG)
Általában a TU játékokban a koalició nyeresége függ a más koaliciók által választott cselekvésektől



Átváltható hasznosságú (TU) játék

$G = (A,v)$: $A = \{1, ...,n\}$ a játékosak, $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ a **koaliciós függvény**
Minden $C \subseteq A$ koalicióra, **v(C)** a **C kifizetése** (értéke), az a nyereség, amit a koalició tagjai megnyerhetnek, ha együttműködnek.
Általában: $v(\varnothing) = 0$, $v(C) \geq 0$ minden $C \subseteq A$
$v(C) \leq v(D)$ minden olyan C, D, hogy $C \subseteq D$
Egy koalició az A egy tetszőleges részhalmaza.
Maga az A az un. **nagykoalició**.

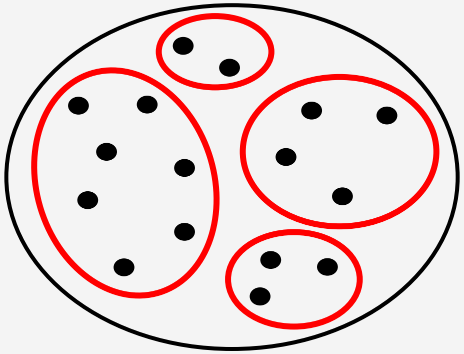
Példa: Néhány gyerek (C,M,P), zsebpénzzel.
A fagyalalt 3 kiszerelésben kapható: \$7-ért 500g, \$9-ért 750g, \$11-ért 1kg.
Minden gyerekcsoport nyeresége a fagylaltnak az a maximális mennyisége, amire fut, ha a csoport pénzét összedobják. A megnyert fagylaltot a csoporton belül akárhogy oszthatják fel.

A fagylaltozás koaliciós függvénye: C: \$6, M: \$4, P: \$3

w = 500g	w = 750g	w = 1000g
p = \$7	p = \$9	p = \$11

$v(\varnothing) = v(\{C\}) = v(\{M\}) = v(\{P\}) = 0$
$v(\{C, M\}) = 750$, $v(\{C, P\}) = 750$, $v(\{M, P\}) = 500$,
$v(\{C, M, P\}) = 1000$

Átváltható hasznosságú játék kimenetele



Egy G =(A, v) játék **kimenetele** (CS, **x**), ahol:

CS = (C_1, …, C_k) egy **koaliciós struktúra:**

az A particionálása koaliciókra, úgy, hogy:

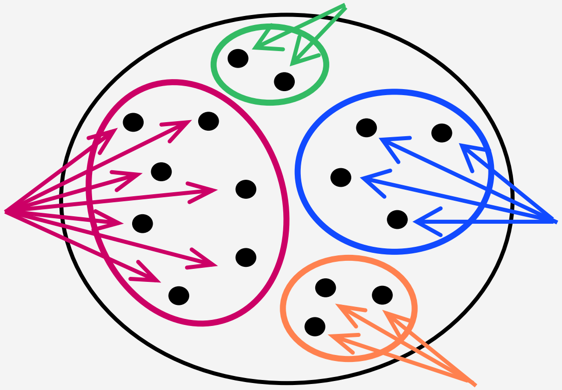
$C_1 \cup \ldots \cup C_k = A$, $C_i \cap \ldots \cap C_j = \emptyset$, ha $i \neq j$

x = (x_1,…,x_n) a **kifizetések** vektora: minden A-beli ágens hasznát adja meg

$x_i \geq 0, \ \forall\, i \in A$

$\sum_{i:\, i \in C} x_i = x(C) = v(C)$, minden $C \in CS$

(ésszerű: se túlkötekezés, se alólköltekezés)



Egy (CS, **x**) kimenetel egy **elosztás**,

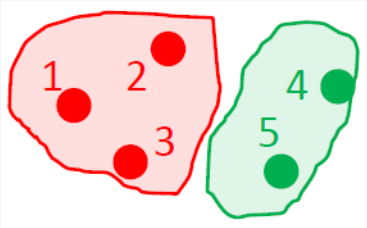
ha **egyénileg elfogadható**, azaz (koalicióban jobb)**:**

$x_i \geq v(\{i\}), \ \forall\, i \in A$

Példa: v({1, 2, 3}) = 9, v({4, 5}) = 4

((\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}), (3, 3, 3, 3, 1)) egy kimenetel, de

((\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}), (2, 3, 2, 3, 3)) nem.



Szuperadditivítás

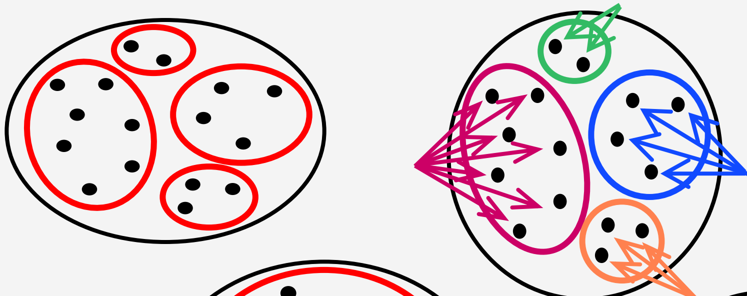
G = (A, v) játék **szuperadditív**, a. cs. a., ha $v(C \cup D) \geq v(C) + v(D)$ bármely diszjunkt C és D koalicióra.

Egy szuperadditív játékban bármely két koalició összeolvadhat veszteség nélkül. Így mindig a nagykoaliciót tételezhetjük fel.

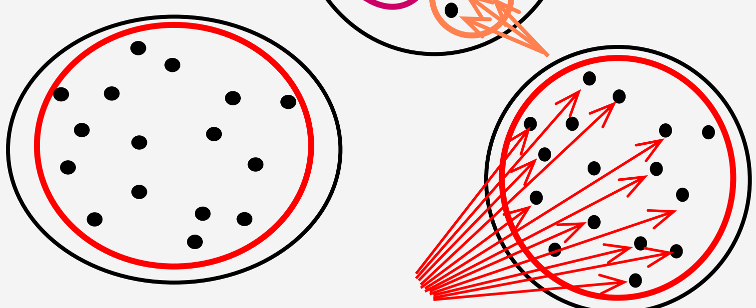
Szuperadditív játékban a kimenetel a nagykoalició kifizetési vektora:
$\underline{\mathbf{x}} = (x_1, ..., x_n)$, $\sum_{i:\, i \in A} x_i = v(A)$.

Bármely nem szuperadditív G = (A, v) játék átalakítható egy $G^{SA} = (A, v^{SA})$ szuperadditív játékká, $v^{SA}(C) = \max_{(C1, ..., Ck) \in P(C)} \sum_{i = 1, ..., k} v(C_i)$ választással, ahol P(C) a C minden particiójának a tere. G^{SA} a G **szuperadditív lefedése**.

Nem szuperadditív játék
- Mely koalició struktúra optimális?
- Hogyan osszuk fel a kifizetést?



Szuperadditív játék
- Nagykoalició mindig optimális!
- Hogyan osszuk fel a nagykoalició kifizetését?



Melyik a jó kimenetel?

C: \$4, M: \$3, P: \$3

$v(\emptyset) = v(\{C\}) = v(\{M\}) = v(\{P\}) = 0$
$v(\{C, M\}) = 500$, $v(\{C, P\}) = 500$,
$v(\{M, P\}) = 0$, $v(\{C, M, P\}) = 750$

Ez egy szuperadditív játék és kimenetelek a kifizetésvektorok.
Hogyan osszák fel a játékosak a fagylaltot?
Ha (200, 200, 350), C és M többet kaphat, ha ketten 500g porciót vesznek és fele-fele osztoznak rajta. A (200, 200, 350) nem stabil!

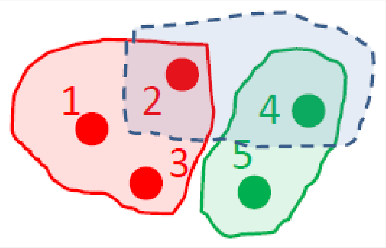
Átváltható hasznosságú játék: stabilitás és a mag

A játék **mag**ja a stabil kimenetelek halmaza (azaz olyanoké, hogy egy koalició sem szeretne ettől eltérni):

$$\mathrm{core}(G) = \{(CS, \mathbf{x}) \mid \textstyle\sum_{i:\, i \in C} x_i \geq v(C) \text{ bármely } C \subseteq A\}$$

minden koalició legalább annyit oszthat fel, amennyit ér.
(G nem szükségképpen szuperadditív)

Legyen $v(\{1, 2, 3\}) = 9$, $v(\{4, 5\}) = 4$, $v(\{2, 4\}) = 7$,
akkor $((\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}), (3, 3, 3, 3, 1))$ nem eleme a magnak, de
$(2, 4, 3, 3, 1)$ igen



Átváltható hasznosságú játék: megoldások

Mag = nem üres, nagy → nem alkalmas jó predikcióra } stabil nagykoalíció
nem üres, kicsi → pontos predikció
üres → instabil stratégiák, nincs használható predikció

ε-Mag (közelítő mag)

Üres mag esetében közelítően stabil kimeneteleket kereshetünk.

ε-mag: (CS, **x**): x(C) ≥ v(C) – ε minden C ∈ A

Legkisebb mag

Ha (CS, **x**) kimenetel ε-mag eleme, bármely koalició v(C) – x(C) hiánya legfeljebb ε. A G **legkisebb magja** az olyan minimális ε* értékű ε-mag, amely nem üres.

Nukleusz - A legkisebb mag **legstabilabb** eleme.

Alkuhalmaz

A G játék **alkuhalmaza** minden olyan elosztás, amire nincs egy jogos kifogás (azaz, amire nincs ellenkifogás).

(i kifogása j-vel - megmutatni egy kimenetelt, ami egy koalicióban i-nek jobb)

A mag az összes olyan elosztás, amire nincs kifogás.

mag ⊆ alkuhalmaz

Átváltható hasznosságú játék: megoldások

Kernel

Egy **x** elosztás kernelben van, ha bármely két i és k ágens egyensúlyban van az **x** szempontjából (kifizetési többletük csak i-t, ill. csak j-t tartalmazó koaliciókban)

nukleusz ⊆ kernel ⊆ alkuhalmaz

Stabilitás és igazságosság

A mag kimenetelei nem mindig igazságosak

$G = (A, v)$: $A = \{1, 2\}, v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = v(\{2\}) = 5, v(\{1, 2\}) = 20$

(15, 5) a mag eleme. A 2-es játékos kilépve nem nyerhet.

Ez nem igazságos, mert a játékosok helyzete szimmetrikus. Igazságosabban?

Határhozzájárulás

Egy igazságos fizetés az ágenseket a hozzájárulásuk arányában díjazná.

Adott $G = (A, v)$ játék, legyen $x_i = v(\{1, ..., i\text{-}1, i\}) - v(\{1, ..., i\text{-}1\})$

Mindegyik játékos kifizetése = határhozzájárulása az elődjei koaliciójához, egy kifizetésvektor, mivel $x_1 + ... + x_n = v(A)$

Azonban minden játékos fizetése a sorrenden múlik:

$G = (A, v)$

$A = \{1, 2\}, v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = v(\{2\}) = 5, v(\{1, 2\}) = 20$

$x_1 = v(1) - v(\emptyset) = 5$, $x_2 = v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 15$

Átlagos határhozzájárulás

Átlagoljuk az összes lehetséges sorrendezésre: $G = (A, v)$

$A = \{1, 2\}$, $v(\emptyset) = 0$, $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 5$, $v(\{1, 2\}) = 20$

1, 2: $x_1 = v(1) - v(\emptyset) = 5$, $x_2 = v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 15$

2, 1: $y_2 = v(2) - v(\emptyset) = 5$, $y_1 = v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = 15$

$z_1 = (x_1 + y_1)/2 = 10$, $z_2 = (x_2 + y_2)/2 = 10$

A kimenetel igazságos! Általánosítható?

$S_\pi(i)$	i	...

Shapley-érték

Legyen $P(A)$ az A halmaz permutációinak halmaza és $S_\pi(i)$ az i-ik játékos elődjeinek halmaza egy $\pi \in P(N)$-ben.

Egy $C \subseteq A$-ra, legyen marginális hozzájárulás: $\delta_i(C) = v(C \cup \{i\}) - v(C)$

Az i-ik játékos **Shapley-értéke** $G = (A, v)$, $|A| = n$ játékban

$$\phi_i(G) = 1/n! \sum_{\pi:\ \pi \in P(A)} \delta_i(S_\pi(i))$$

Az előbbi számításnál $\phi_1 = \phi_2 = 10$

ϕ_i az i-ik játékos várható határhozzájárulása az elődjeinek koalíciójához, minden egyenletesen sorsolt permutáció felett.

δ_i^{max}, δ_i^{min} - egy kimenetel értelmes felülről, ha $\delta_i^{max} \geq x_i$, $\forall\, i \in A$, egy koalícióval szemben legerősebb kifogás, és értelmes alúlról, ha $x_i \geq \delta_i^{min}$, $\forall\, i \in A$, a minimális elfogadható díjazás.

Shapley-érték tulajdonságai

Bármely G játékban: $\phi_1 + ... + \phi_n = v(A)$, azaz $(\phi_1, ..., \phi_n)$ egy kifizetési vektor.
Az i-ik játékos egy G = (A, v) játékban **sallang játékos**,
ha $v(C) = v(C \cup \{i\})$, minden $C \subseteq A$-re.
Ha egy G = (A, v) játékban az i-ik játékos egy sallang játékos, akkor $\phi_i = 0$.
Egy G = (A, v) játékban, két i-ik és j-ik játékos **szimmetrikus**,
ha $v(C \cup \{i\}) = v(C \cup \{j\})$, minden $C \subseteq A \setminus \{i, j\}$-re.
Ha i-ik és j-ik játékos szimmetrikus, akkor $\phi_i = \phi_j$
Legyen $G_1 = (A, u)$ és $G_2 = (A, v)$ két játék ugyanazzal a játékoshalmazzal.
Akkor $G = G_1 + G_2$ egy játék ugyanazzal a játékoshalmazzal és
$w(C) = u(C) + v(C)$ koaliciós függvénnyel, minden $C \subseteq A$-re, és
$\phi_i(G_1+G_2) = \phi_i(G_1) + \phi_i(G_2)$.

1. **Hatékonyság**: $\phi_1 + ... + \phi_n = v(A)$
2. **Sallang játékos**: ha i-ik játékos sallang játékos, akkor $\phi_i = 0$
3. **Szimmetria**: ha i-ik és j-ik játékos szimmetrikus, akkor $\phi_i = \phi_j$
4. **Additivítás**: $\phi_i(G_1+G_2) = \phi_i(G_1) + \phi_i(G_2)$

Tétel: Shapley-érték az az **egyetlen** kifizetést elosztó séma, ami az (1-4) tulajdonságokkal rendelkezik.

Banzhaf Index

Átlagoljuk az összes koalició felett.
Az i-ik játékos Banzhaf indexe egy G = (A, v), |A| = n, játékban:

$$\beta_i(G) = 1/2^{n-1} \sum_{C \subseteq A \setminus \{i\}} \delta_i(C)$$

Teljesül: sallang j., szimmetria, additivítás.
Sérülhet: hatékonyság

Shapley and Banzhaf

1. Példa (egyhangú játék):
   - G = (A, v), |A| = n, v(C) = 1, ha C = A, különben v(C) = 0.
   - $\delta_i(C) = 1$ a.cs.a. $C = A \setminus \{i\}$
   - $\phi_i(G) = (n-1)!/n! = 1/n$, i = 1, ..., n-re
   - $\beta_i(G) = 1/2^{n-1}$, i = 1, ..., n-re

2. Példa (többségi játék):
   - G = (A, v), |A| = 2k, v(C) = 1, ha |C| > k, különben v(C) = 0.
   - $\delta_i(C) = 1$ a.cs.a. $|C| = k$
   - $\phi_i(G) = (n-1)!/n! = 1/n$, i = 1, ..., n -re
   - $\beta_i(G) = 1/2^{n-1} \times (2k)!/(k!)^2 \approx 2/\sqrt{(\pi k)}$, i = 1, ..., n –re.

Egyszerű játék

Egy G = (A, v) játék **egyszerű**, ha

$v(C) \in \{0, 1\}$, bármely $C \subseteq A$

v monoton: ha $v(C) = 1$ és $C \subseteq D$, akkor $v(D) = 1$

Egyszerű játék C koalíciója **győztes**, ha $v(C) = 1$ és **vesztes**, ha $v(C) = 0$.

Egyszerű játékban az i-ik játékos egy **véto játékos**, ha $v(C) = 0$, minden $C \subseteq A\setminus\{i\}$ $(v(A\setminus\{i\}) = 0$ is)

Egyszerű játéknak magja nem üres, a.cs.a. ha van benne egy véto játékos.

Egyszerű G játékban az **x** kifizetési vektor a mag eleme,a.cs.a. ha $x_i = 0$ minden nem véto játékosra.

Súlyozott szavazási játék - WVG

$G = (A, v)$, $A = \{1, ..., n\}$

$w(C) = \sum_{i \in C} w_i$ a koalíciós tagok súlya

$v(C) = 1$, ha $w(C) \geq q$, különben $v(C) = 0$.

Súlyozott szavazási játék egy egyszerű játék.

Jelölése: $G = [q; w_1, ..., w_n]$, q a **kvóta**.

Súlyozott szavazási játék - WVG

n párt a parlamentben. Az i-ik pártnak w_i képviselője van.
Egy pártkoalició alakíthat kormányt, ha a nagysága legalább q
– általában $q \geq \lfloor \sum_{i=1, \ldots, n} w_i / 2 \rfloor + 1$: minősített többség, $w(C) = \sum_{i \in C} w_i$

United Kingdom, 2005:
– 650 parlamenti hely, q = 326
– Konszervatívak (C): 196
– Munkáspárt (L): 354
– Liberális Demokráták (LD): 62
– 8 más párt (O), összesen 38 hellyel.

A = {C, L, LD, O}
minden $X \subseteq A$, $v(X) = 1$ a.cs.a. ha $L \in X$

L a véto, C, LD, és O a sallang játékosok
$\phi_L = 1$, $\phi_C = \phi_{LD} = \phi_O = 0$

United Kingdom, 2010:
– 650 hely, q = 326
– Konz. (C): 307
– Munkásp. (L): 258
– Lib. Dem. (LD): 57
– 8 más (O), össz. 28 hely

A = {C, L, LD, O}
v({C, L}) = v({C, LD}) = v({C, O}) = 1
v({L, LD}) = v({L, O}) = v({LD, O}) = 0,
v({L, LD, O}) = 1
L, LD és O szimmetrikusak
$\phi_C = 1/2$, $\phi_L = \phi_{LD} = \phi_O = 1/6$

1958 European Economic Community: Belgium, Olaszo., Franciao., Németo., Luxemburg és Hollandia. A szavazatai: Olaszo., Franciao., Németo.: 4, Belgium, Hollandia: 2, Luxemburg: 1. A kvóta: q = 12.

Súlyozott szavazás mint egy erőforrás elosztás játék

Minden játékos erőforrások egy w_i (idő, pénz, energia, …) részével rendelkezik. Egy vagy több feladat erőforrások q mennyiségét ígényli és V értéket képvisel. Ha egy koaliciónak elegendő erőforrása van a feladatot végrehajtására (q vagy több egység), V értéket nyer, különben 0-át.
$V = 1$ –re normálhatjuk. Ha $q < \sum_i w_i /2$, nagykoalicióra nincs szükség, súlyozott szavazás játék koaliciós struktúrával.

Shapley-érték súlyozott szavazásban

Egy egyszerű $G = (A, v)$ játékban egy játékos **központi szerepű**
– egy $C \subseteq A$ koalició esetében, ha $v(C) = 0$, $v(C \cup \{i\}) = 1$
– egy $\pi \in P(N)$ permutáció esetében, ha központi szerepű az $S_\pi(i)$ –re.
Egyszerű játékokban egy i-ik játékos Shapley-értéke =
Pr[i központi szerepű véletlen permutációra nézve]
– a szavazati erő mértéke.

Shapley-értéket széles körben használják a különböző szavazó testületek erőviszonyainak számítására.

Vektor súlyozott szavazás játék – k-VWVG

Egy k-súlyú szavazási játék az $[A; \mathbf{q}; \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n]$ n-es, ahol $|A| = n$ és

$\mathbf{q} = (q^1, ..., q^k)$ a k valós kvóta vektora

minden $i \in A$, $\mathbf{w}_i = (w^1_i, ..., w^k_i)$ a k valós súly vektora.

$v(C) = 1$, ha $\sum_{i \in C} w^j_i \geq q^j$ minden $j = 1, ..., k$ különben $v(C) = 0$.

Legyen $G = [A; \mathbf{q}; \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n]$ egy k-VWVG játék.
Legyen $G^j = [q^j; w^j_1, ..., w^j_n]$ egy WVG, ami a G VWVG j-ik komponense.

A G megnyeréséhez egy koalíciónak az összes komponens játékot kell megnyernie.

$$G = G^1 \wedge ... \wedge G^k$$

a G a komponens játékainak konjunkciója.

A k-VWVG játék a k tipusú erőforrás elosztását modellezi, ahol minden feladatnak j-ik erőforrásból q^j egységre van szüksége.

2011

Szavazás EU-ban: 3-VWVG $G = G^1 \wedge G^2 \wedge G^3$, ahol

– G^1 a bizottságvezetőket
– G^2 az államokat
– G^3 a populációkat jelképezi.

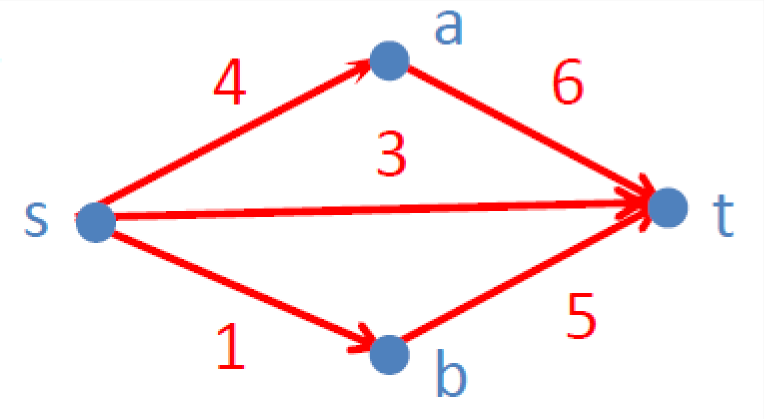
27 játékos (tagállam) van: Németo., UK, Franciao., Olaszo., Spanyolo., Lengyelo., Románia, Hollandia, Görögo., Csehközt., Belgium, Magyaro., Portugália, Svédo., Bulgária, Ausztria, Szlovákia, Dánia, Finno., Íro., Litvánia, Letto., Szlovénia, Észto., Ciprus, Luxembourg, Málta.

G1 = [255; 29, 29, <u>29</u>, 29, 27, 27, 14, 13, **12**, 12, 12, 12, 12, 10, 10, 10, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 4, *4*, 4, 4, 3]
G2 = [14; 1, 1, <u>1</u>, 1, 1, 1, 1, 1, **1**, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, *1*, 1, 1, 1]
G3 = [620; 170, 123, <u>122</u>, 120, 82, 80, 47, 33, **22**, 21, 21, 21, 21, 18, 17, 17, 11, 11, 11, 8, 8, 5, 4, *3*, 2, 1, 1]
– <u>UK</u>, **Görögo.**, *Észto*.

Egy javaslat elfogadásáról a bizottsági vezetők 74%-ának, a tagállamok 50%-ának, és az EU populációjának 62%-ának támogatása szükséges.

Milyen súlya van Nagy Britániának, Görögo.-nak és Észto.-nak?

Hálózati folyam játékok



Ágensek élek egy hálózatban egy s forrással és t nyelővel.

– e_i él kapacitása c_i

Egy koalició értéke = az s–t folyam mértéke, amit a koalició képes átengedni (fenntartani)
– pl. v({sa, at}) = 4, v({sa, at, st}) = 7

Küszöbölt hálózati folyam játék (Thresholded Network Flow Game - TNFG):
létezik olyan küszöb, hogy:
– v(C) = 1, ha C képes fenntartani a folyam ≥ T egységét
– különben v(C) = 0

TNFG T = 6 mellett:
– v({sa, at}) = 0, v({sa, at, st}) = 1

Koaliciós Képesség Játékok (Coalition Skill Games)

Képességek $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ halmaza
Ágensek A halmaza:
egy i-ik ágensnek $S_i \subseteq S$ képességhalmaza van.

A **feladatok** $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ halmaza
– minden t_j feladathoz a **képességek** $S(t_j) \subseteq S$ **halmaza** szükséges.

Egy C koalició **képességhalmaza**: $s(C) = \bigcup_{i \in C} S_i$

A C által **teljesíthető** feladatok: $T(C) = \{t_j \mid S(t_j) \subseteq S(C)\}$

A **hasznosság** függvény $u: 2^T \rightarrow R$
– pl. az egyes feladatok összesített, vagy max értékei

A koaliciós függvény: $v(C) = u(T(C))$

Koaliciós struktúra generálása

3 ágens, a lehetséges koaliciók:

{a1} {a2} {a3} {a1,a2} {a1,a3} {a2,a3} {a1,a2,a3}

A lehetséges **koaliciós struktúrák:**

{{a1},{a2},{a3}} {{a1,a2},{a3}} {{a2},{a1,a3}} {{a1},{a2,a3}} {{a1,a2,a3}}

Adva van a **koaliciós függvény**:

v({a1}) = 20	v({a1,a2}) = 70	
v({a2}) = 40	v({a1,a3}) = 40	
v({a3}) = 30	v({a2,a3}) = 65	v({a1,a2,a3}) = 95

Kívánt eredmény: az a (**optimális**) koaliciós struktúra, amire az értékek összege **maximális:**

V({{a1},{a2},{a3}}) = 20+40+30 = 90

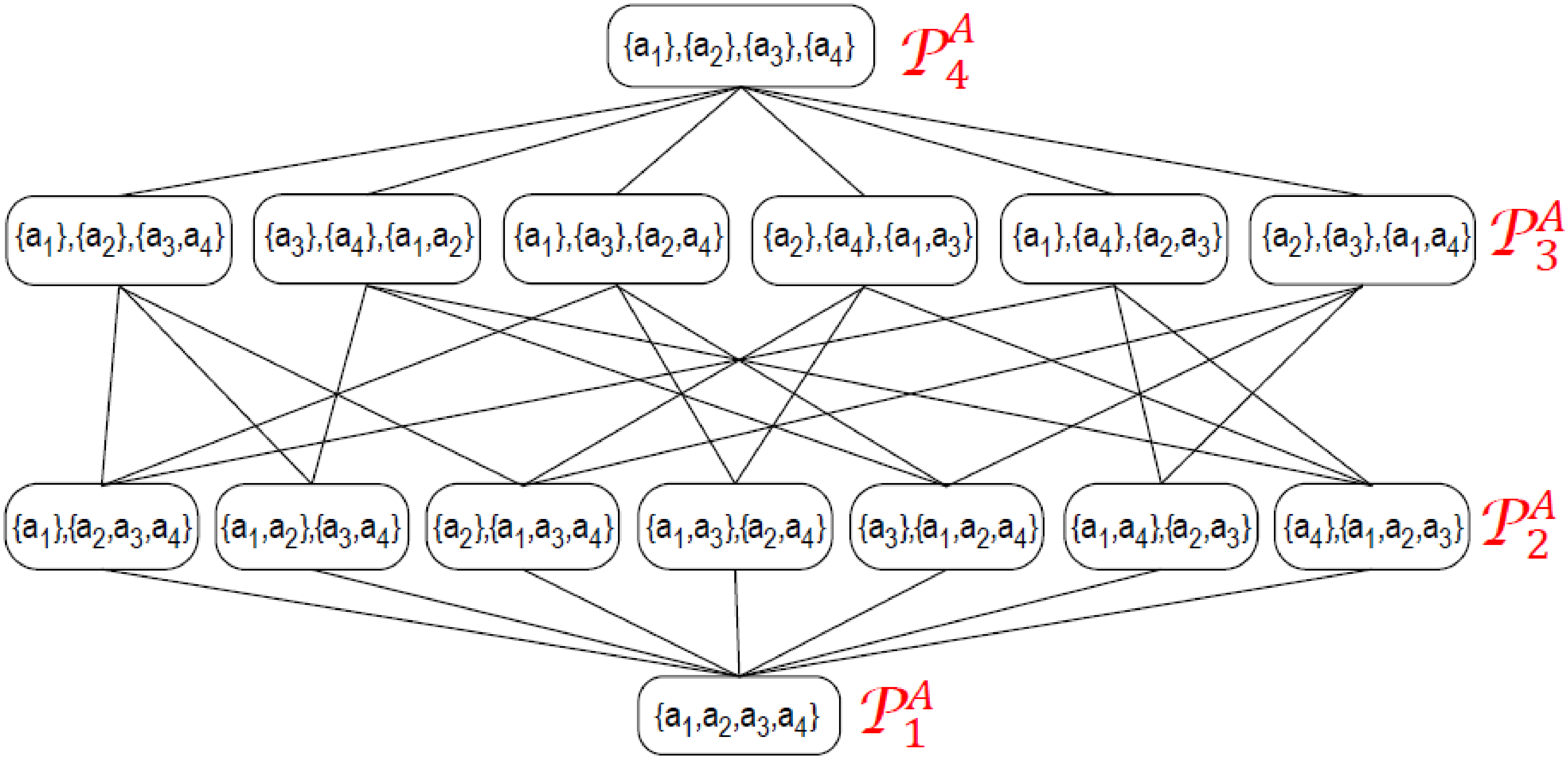
V({{a1,a2},{a3}}) = 70+30 = 100

V({{a2},{a1,a3}}) = 40+40 = 80

V({{a1},{a2,a3}}) = 20+65 = 85

V({{a1,a2,a3}} = 95

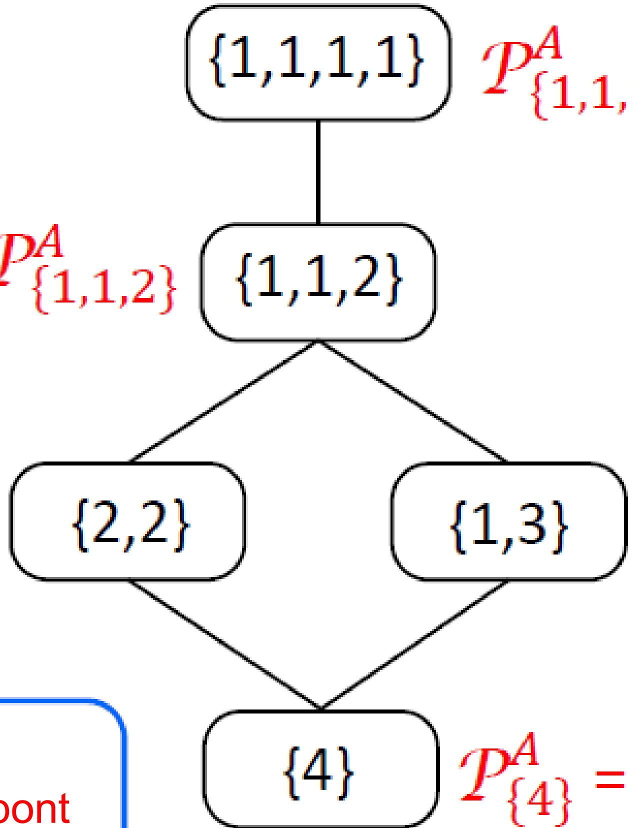
Koalicióstruktúra gráfja



Szomszédos koalicióstruktúrák – egy-egy részkoalició ketté bontása

2011

Integer Particiós Gráf



$$\mathcal{P}^A_{\{1,1,1,1\}} = \left\{ \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}\} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3,a_4\}\}, \\ \{\{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1,a_4\}\}, \\ \{\{a_1\}, \{a_3\}, \{a_2,a_4\}\}, \\ \{\{a_2\}, \{a_4\}, \{a_1,a_3\}\}, \\ \{\{a_1\}, \{a_4\}, \{a_2,a_3\}\}, \\ \{\{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1,a_2\}\} \end{array} \right\} = \mathcal{P}^A_{\{1,1,2\}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\{a_1,a_2\}, \{a_3,a_4\}\}, \\ \{\{a_1,a_3\}, \{a_2,a_4\}\}, \\ \{\{a_1,a_4\}, \{a_2,a_3\}\} \end{array} \right\} = \mathcal{P}^A_{\{2,2\}}$$

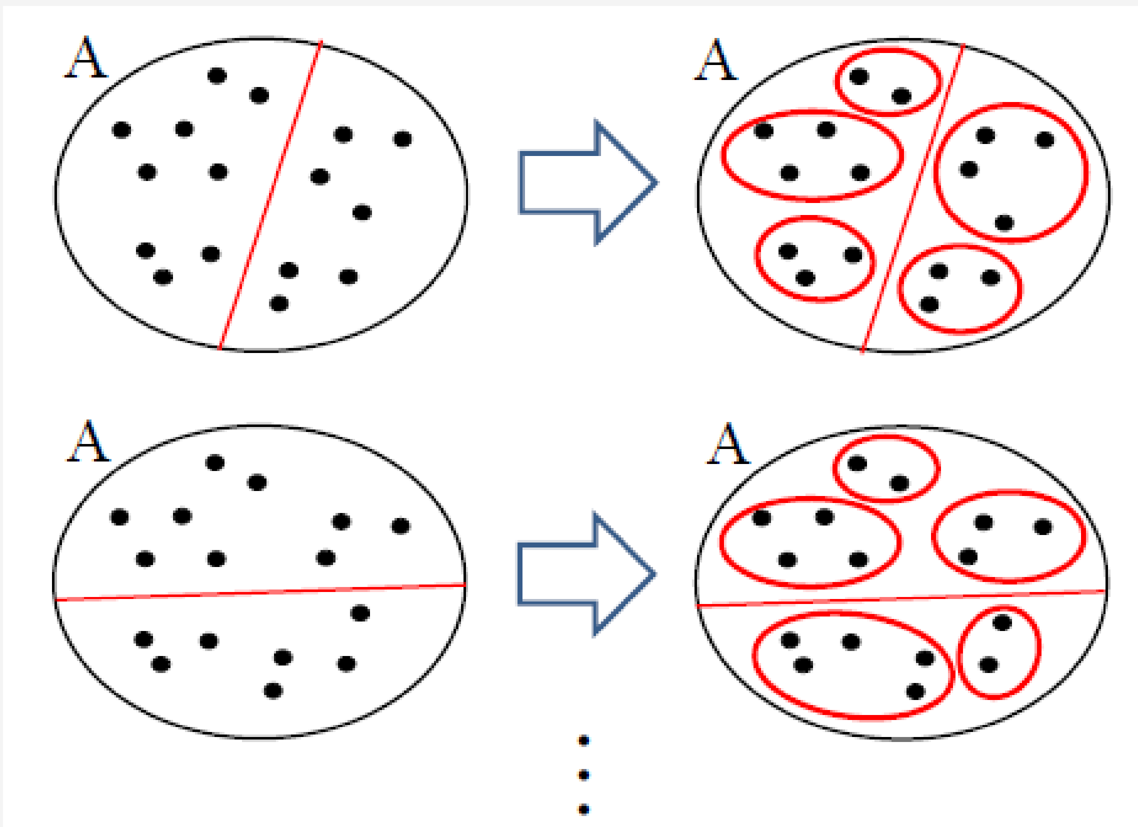
$$\mathcal{P}^A_{\{1,3\}} = \left\{ \begin{array}{l} \{\{a_1\}, \{a_2,a_3,a_4\}\}, \\ \{\{a_2\}, \{a_1,a_3,a_4\}\}, \\ \{\{a_3\}, \{a_1,a_2,a_4\}\}, \\ \{\{a_4\}, \{a_1,a_2,a_3\}\} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{P}^A_{\{4\}} = \left\{ \{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}\} \right\}$$

{2,2} csomópont altere

Dynamic Programming (DP)

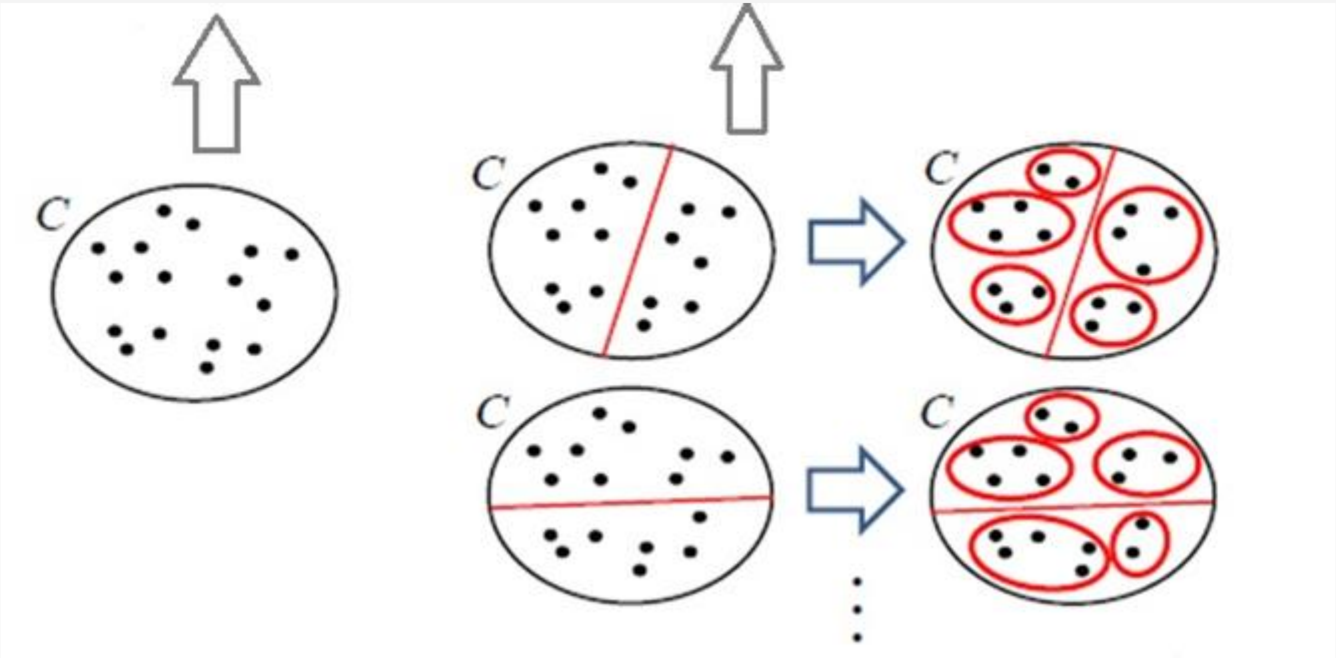
Az összes *CS : |CS| ≥ 2* koaliciós struktúra elemzéséhez **elegendő**:
- az ágensek halmazát minden lehetséges módon **két részre bontani** és
- minden félhez megtalálni annak az **optimális particióját.**



Dynamic Programming (DP)

Ha adott egy C ∈ A koalició, legyen P^C a C particióinak halmaza és legyen *f*(C) a C optimális particiójának értéke, azaz *f*(C) = *max* $_{P \in PC}$ v(*P*).
Akkor:

$$f(C) = \begin{cases} v(C) & |C| = 1 \\ max\left\{v(C), max_{\{C',C''\} \in P^C} f(C') + f(C'')\right\} & máskülönben \end{cases}$$



2011

Dynamic Programming (DP)

Algoritmus:

Iteráljuk minden C:|C|=1 koalició felett, majd minden C:|C|=2 koalició felett, majd minden C:|C|=3 koalició felett, stb.

Minden C koalicióra számítsuk ki f(C)-t, az előbbi képlet felhasználásával .

Az f(C) számítása közben:

- az algoritmus t(C)-ben a C két részre bontásának a legjobb módját tárolja,

- hacsak nem előnyősebb a C-t egészében megtartani,

- e folyamat végén kiszámítjuk az f(A)-t, ami definíciószerűen az optimális koalició értéke,

- majd ki kell számítani t(A) segítségével az optimális koaliciós struktúrát.

(Megjegyzés: redundáns tárolás, nagy A-ra exp. nehéz, …, vannak gyorsítások, közelítések, …)

input:

v({1}) = 30
v({2}) = 40
v({3}) = 25
v({4}) = 45
v({1,2}) = 50
v({1,3}) = 60
v({1,4}) = 80
v({2,3}) = 55
v({2,4}) = 70
v({3,4}) = 80
v({1,2,3}) = 90
v({1,2,4}) = 120
v({1,3,4}) = 100
v({2,3,4}) = 115
v({1,2,3,4}) = 140

	coalition	evaluations performed before setting f		t	f
step 1	{1}	v({1})=30		{1}	30
	{2}	v({2})=40		{2}	40
	{3}	v({3})=25		{3}	25
	{4}	v({4})=45		{4}	45
step 2	{1,2}	v({1,2})=50	f({1})+f({2})=70	{1} {2}	70
	{1,3}	v({1,3})=60	f({1})+f({3})=55	{1,3}	60
	{1,4}	v({1,4})=80	f({1})+f({4})=75	{1,4}	80
	{2,3}	v({2,3})=55	f({2})+f({3})=65	{2} {3}	65
	{2,4}	v({2,4})=70	f({2})+f({4})=85	{2} {4}	85
	{3,4}	v({3,4})=80	f({3})+f({4})=70	{3,4}	80
step 3	{1,2,3}	v({1,2,3})=90 f({2})+f({1,3})=100	f({1})+f({2,3})=95 f({3})+f({1,2})=95	{2} {1,3}	100
	{1,2,4}	v({1,2,4})=120 f({2})+f({1,4})=110	f({1})+f({2,4})=115 f({4})+f({1,2})=115	{1,2,4}	120
	{1,3,4}	v({1,3,4})=100 f({3})+f({1,4})=105	f({1})+f({3,4})=110 f({4})+f({1,3})=105	{1} {3,4}	110
	{2,3,4}	v({2,3,4})=115 f({3})+f({2,4})=110	f({2})+f({3,4})=120 f({4})+f({2,3})=110	{2} {3,4}	120
step 4	{1,2,3,4}	v({1,2,3,4})=140 f({2})+f({1,3,4})=150 f({4})+f({1,2,3})=145 f({1,3})+f({2,4})=145	f({1})+f({2,3,4})=150 f({3})+f({1,2,4})=145 f({1,2})+f({3,4})=150 f({1,4})+f({2,3})=145	{1,2} {3,4} step 5	150

Kompakt reprezentációk
Határhozzájárulás hálók – Marginal Contribution (MC) Nets

Játékreprezentáció: pattern → érték alakú **szabály**halmaz
– **pattern**: a játékosok A halmaza feletti ítéletállítás (konjunkció + negálás)
– **érték** egy valós szám

Egy szabály egy koalicióra **alkalmazható**, ha az teljesíti a pattern-et.
v(C) = a C-re alkalmazható szabályok értékeinek **összege**

Pl. R_1: (ag1 ∧ ag2) → 3
R_2: ag2 → 2 v({ag1}) = 0, v({ag2}) = 2, v({ag1, ag2}) = 5

Shapley-érték számítása:
– legyen $G(R_1, ..., R_k)$ az $R_1, ..., R_k$ szabályhalmaz által definiált játék
– $G(R_1, ..., R_k) = G(R_1) + ... + G(R_k)$
– additivítás miatt elegendő Shapley-értéket kiszámítani egyetlen R szabály által definiált játékra
– ha R = y → x, ahol y a k változó konjukciója, akkkor $\phi_i = x/k$, ha i az y-ban található, különben 0
- **NP-nehéz** a **tetszőleges** ítéletlogikai állítás esetében