Nem-kooperatív játékok

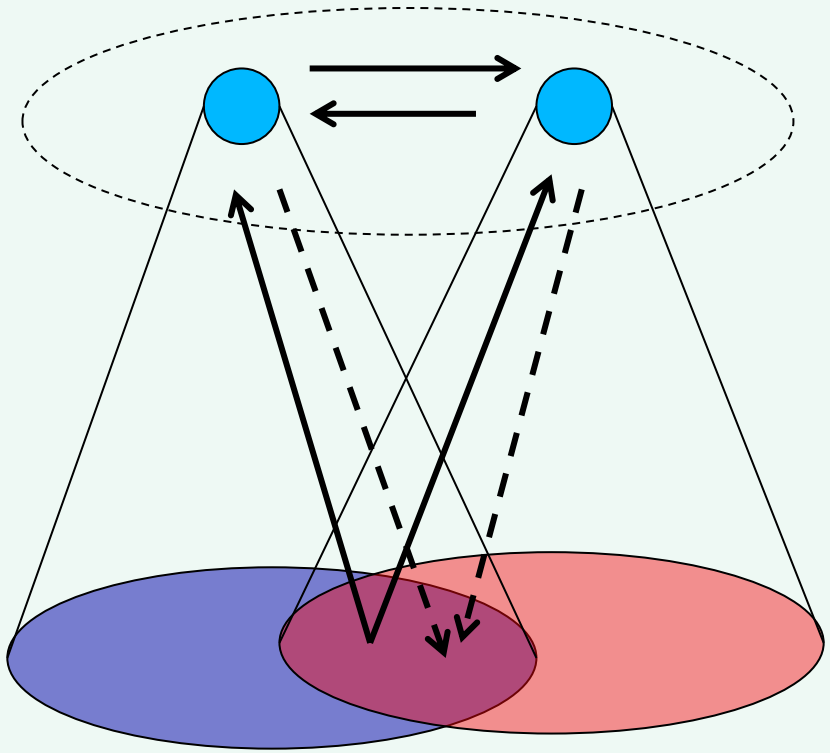
Versengő ágensek konfliktusai – játékelmélet

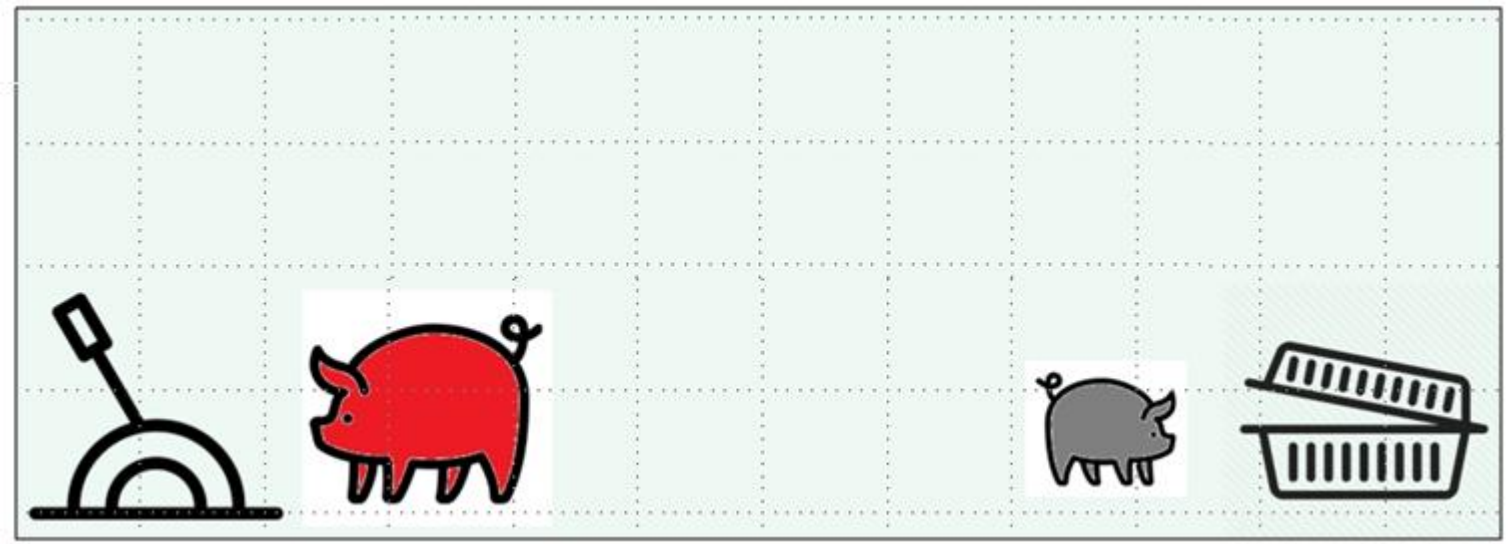
Ágensek cselekvéseivel más ágensek cselekvéseit befolyásolják.

Ettől mindenkinél a cselekvések eredménye (várható haszna) meg fog változni.

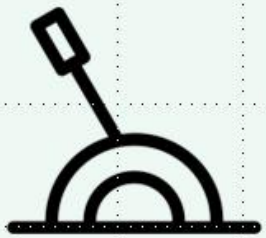
A változás az „én” cselekvésem,
de a „te” cselekvésed is a függvénye.

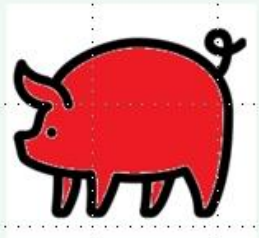
Egy jó matematikai modell kell
- hogy … leírhassuk,
- hogy … megjósolhassuk,
- hogy … megtervezhessük.

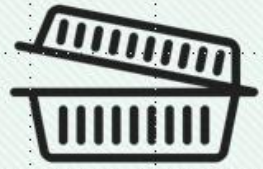




		Nagy malac: Meghúz	Nagy malac: Nem
Kicsi malac	Meghúz	2, 6	-1, 10
	Nem	8, 1	0, 0







Matematikai modellek

A kölcsönös (szociális?) jólét és a befolyásolásának jellemzése:

Normál alak (stratégiai alak)

Játék $\Gamma = \left(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}\right)$ $\quad N = \{1,2,\ldots,n\}$

Stratégiák és kombinációi

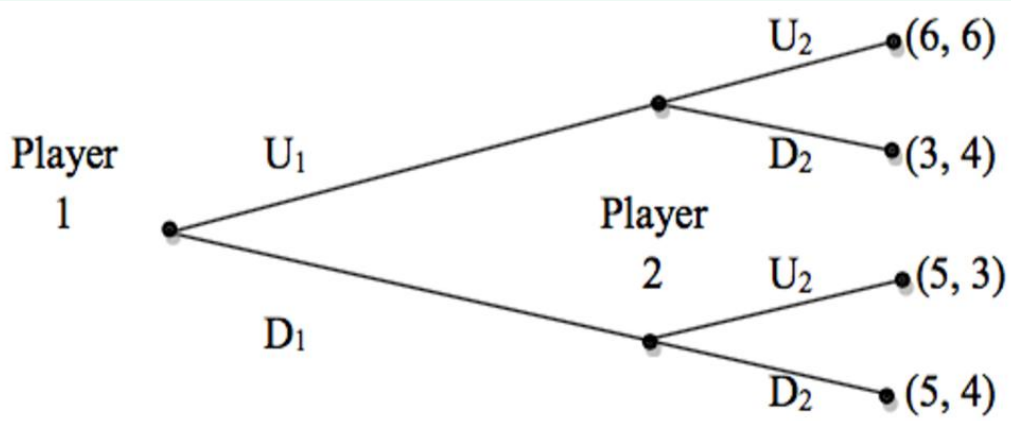
$$S = \left\{ \left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right) \middle| \, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \ldots, s_n \in S_n \right\}$$

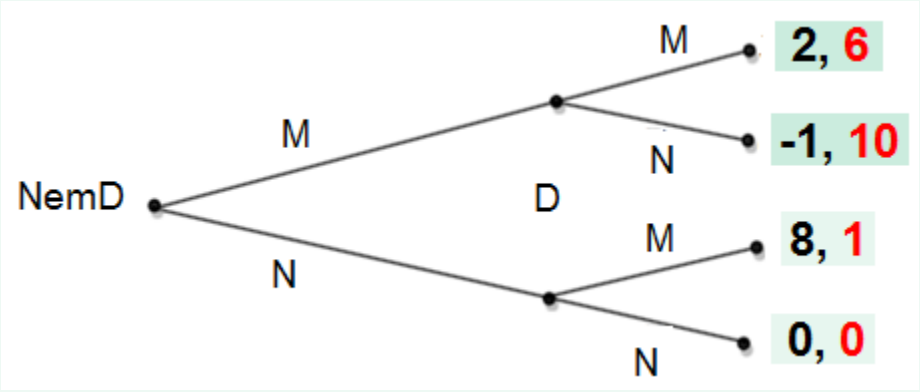
Haszonfüggvények $\quad u_i : S \to \Re \quad \forall i \in N - re$

Kifizetési (payoff) mátrix

		Player 2: C	Player 2: D
Player 1	C	2, 2	3, 0
	D	0, 3	1, 1

Extenzív alak (játékfa alak)





Malacok

	Meghúz	Nem
Meghúz	**2, 6**	**-1, 10**
Nem	**8, 1**	**0, 0**

Szimmetria $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$

$\forall i \in N$, $s \in S$, és π permutáció esetén

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = u_{\pi(i)}(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \ldots, s_{\pi(n)})$$

Zérus-összeg $n = 2,\ S_1 = S_2,\ \forall s \in S\text{-re}\ u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$

$$\forall s \in S\text{-re} \sum_{i \in N} u_i(s) = 0$$

Racionális játékosok

= önérdekű = magánzó = profit-orientált = …

Kölcsönös tudás

	Meghúz	Nem
Meghúz	**2, 6**	**-1, 10**
Nem	**8, 1**	**0, 0**

Tiszta stratégia $s \in S_i$

Stabil stratégia

a változó körülmények miatt játékos ne akarjon stratégiát váltani

Domináns stratégia $i \in N,\ s_i, s_i^* \in S_i\ ,\quad s_i^* \succ s_i$, ha

$$\forall s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_{-i} = \underset{j \in N,\ j \neq i}{\times} S_j$$

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \exists s'_{-i} \in S_{-i}\ , u_i(s_i^*, s'_{-i}) > u_i(s_i, s'_{-i})$$

	$q_2(M)$	$q_2(N)$	
	Meghúz	**Nem**	
Meghúz	**2, 6**	**-1, 10**	$q_1(M)$
Nem	**8, 1**	**0, 0**	$q_1(N)$

Kevert stratégia $i \in N, q_i \in Q_i = \Delta(S_i)$

(tiszta $q_i(s_i) = 1$)

$$\forall s_i \in S_i,\ q_i(s_i) \geq 0, \text{ és } \sum_{s_i \in S_i} q_i(s_i) = 1$$

Kevert stratégia kombináció

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n$$

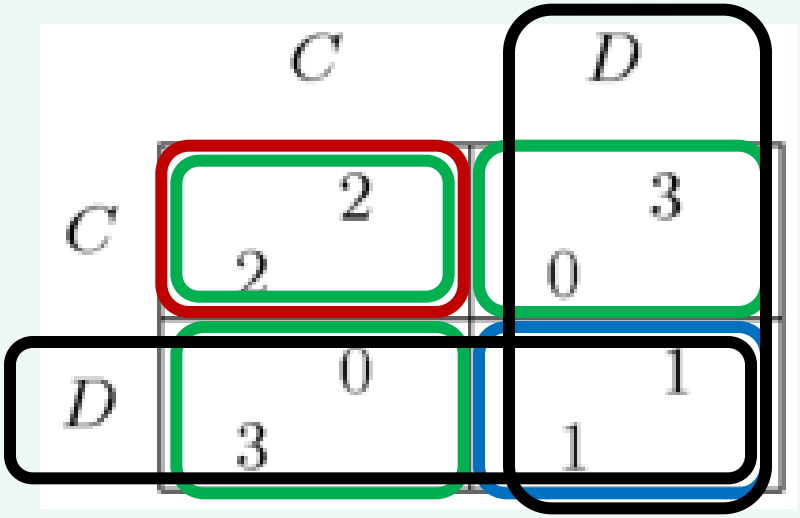
Haszonfüggvény

$$\forall i \in N, \quad u_i : Q \to \Re,\ q \in Q$$

$$u_i(q) = \sum_{s=(s_1,s_2,\ldots,s_n) \in S} q_1(s_1) \cdot q_2(s_2) \cdot \ldots \cdot q_n(s_n) \cdot u_i(s)$$

Mely stratégia(pár)? Mely megoldás?

Dominált
Egyensúlyi
Pareto
Szociális jólét maximálizáló
…



Mely stratégia(pár)?
Mely megoldás?

		Column player 2		
Row player 1				
	$2, -2$	$0, 0$	$1, -1$
	$4, -4$	$-3, 3$	$2, -2$
	$1, -1$	$-2, 2$	$2, -2$

Minimax stratégia (általánosságban nem stabil)

$$q_1^* = \max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} u(q_1, q_2), \quad q_2^* = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} u(q_1, q_2)$$

(Neumann, 1928)

Ha egy 2-személyes zéró-összegű játékban teljesül a minimax-feltétel, akkor a játéknak van nyeregpontja (egyensúlya), és a játék értéke a minimax-feltétel két oldalán álló kifejezés közös értéke.

$$\min_{q_2 \in Q_2} u(q_1^*, q_2) = u(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1 \in Q_1} u(q_1, q_2^*)$$

Minimax stratégia

	Column player 2		
Row player 1	$2, -2$	$0, 0$	$1, -1$
	$4, -4$	$-3, 3$	$2, -2$
	$1, -1$	$-2, 2$	$2, -2$

	Column player 2		
Row player 1	2	0	1
	4	-3	2
	1	-2	2

		Column player 2			
		A	B	C	minimum gain
Row player 1	A	2	0	1	0
	B	4	-3	2	-3
	C	1	-2	2	-2
	maximum loss	4	0	2	

MAX

MIN

Mely stratégia(pár)? Mely megoldás?

Domináns stratégia $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$

1 \ 2	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Domináns stratégia általában nincs.

Dominált stratégiák iterált eliminációja

(u,v)(x,y,z) játékban
y dominálja x-et,
(u,v)(y,z) játékban
v dominálja u-t,
(v)(y,z) játékban
y dominálja z-t,
(v,y) a dominált stratégia pár.

Mely stratégia(pár)? Mely megoldás?

Szociális jólét stratégia $s^* = \arg\max_s \sum_s u_i(s)$

1 \ 2	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

1 \ 2	x	y	z
u	(9)	(6)	(6)
v	(8)	(10)	(8)

(és ha nem (2,8), hanem (-10,20)?)

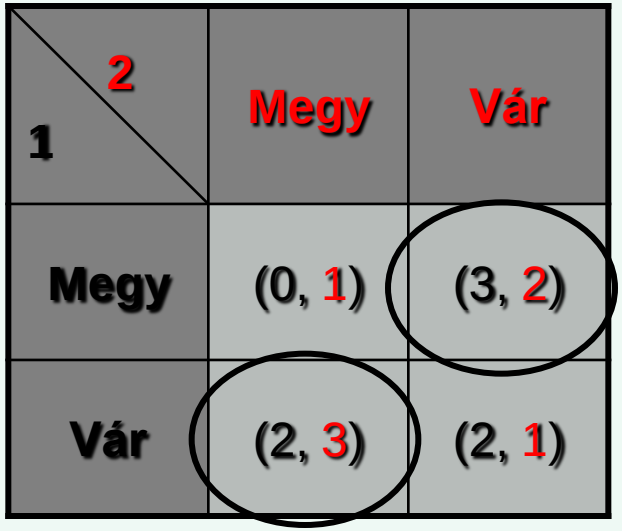
Pareto-optimális (hatékony)

(u,x), (v,y) $\{s \mid \neg\exists_{s' \neq s}(\exists_i u_i(s') > u_i(s) \wedge \neg\exists_{j \in -i} u_j(s) > u_j(s'))\}$

Több is lehet.

Mely stratégia(pár)? Mely megoldás?

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$$



Nash-egyensúly

$$\forall i \in N,\ s_i \in S_i,\ u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

$$q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*) \in Q$$

Kevert Nash-egyensúly

$$q_{-i}^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_{i-1}^*, q_{i+1}^*, \ldots, q_n^*)$$

$$\forall i \in N,\ q_i \in Q_i,\ u_i(q_i^*, q_{-i}^*) \geq u_i(q_i, q_{-i}^*)$$

Általában több is lehet.
Koordináció?

$$\forall i,\ q_i^* \in \arg\max_{q_i \in Q_i} u_i(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \ldots, q_n^*)$$

(Nash, 1951): Ha egy n-játékos játék tiszta stratégiahalmazai végesek, akkor a játéknak van legalább egy **kevert** Nash egyensúlya. (tiszta stratégia is egy kevert stratégia!).

1 \ 2	Megy	Vár
Megy	(0, 1)	(3, 2)
Vár	(2, 3)	(2, 1)

1 \ 2	Megy r	Vár 1-r
Megy p	(0, 1)	(3, 2)
Vár 1-p	(2, 3)	(2, 1)

Nash-egyensúly

Minden oszlopban (a 2. minden stratégiájára) hol van az 1. hasznának a maximuma?
Ha abban a sorban (1. stratégia) és oszlopban (2. stratégia) a 2. haszna sor-maximális = NE.

Kevert Nash-egyensúly

A q* stratégia-együttes akkor és csak akkor alkot kevert Nash-egyensúlyt, ha minden játékosnak maximális hasznot adnak a kevert stratégia pozitív valószínűséggel játszott tiszta stratégiái, azaz:

$$u_i(s_i, q^*_{-i}) = u_i(s'_i, q^*_{-i}), \quad s_i, s'_i \in S_i^+(q^*)$$

$$u_i(s_i, q^*_{-i}) \geq u_i(s'_i, q^*_{-i}), \quad s_i \in S_i^+(q^*),\ s'_i \notin S_i^+(q^*)$$

$$0\,r + 3(1-r) = 2\,r + 2(1-r) \quad \Rightarrow r = 1/3$$

$$p + 3(1-p) = 2\,p + (1-p) \quad \Rightarrow p = 2/3$$

Jellegzetes játéksémák

Fogoly dilemma (Prisoner's dilemma)

Egy súlyos bűntény kapcsán két gyanúsítottat tartóztat le a rendőrség. Mivel a vádemeléshez nem áll rendelkezésre elegendő bizonyíték, ezért elkülönítve előzetesbe helyezik őket, és mindkettejüknek ugyanazt a vádalkut kínálják. Amennyiben az egyik fogoly vall, de társa hallgat, akkor az előbbinek **elengedik** a büntetését, míg a másik, aki hallgatott, **10 év börtönt** kap. De ha az első tagadja meg a vallomást, a másik viszont vall, akkor azt fogják **elengedni** és az első kap **10 évet**. Ha egyikük sem vall, akkor egy kisebb bűntényért fejenként **1-1 évet** kapnak, ha pedig mindketten vallanak, úgy fejenként **5 évet kapnak**.

1 \ 2	Vall	Tagad
Vall	(-5,-5)	(0, -10)
Tagad	(-10, 0)	(-1, -1)

Stratégiák:

- domináns (Vall)
- NE (Vall, Vall)
- Pareto (Tagad, Tagad)
- Jóléti (Tagad, Tagad)
- kevert NE ?

koordináció ?

Jellegzetes játéksémák

Gyáva nyúl (Chicken)

Két autós száguld egymással szemben, és az veszít, aki előbb rántja el a kormányt, hogy az ütközést elkerülje. Nézzük a dolgot az ő szempontjukból: „A legrosszabb eset nyilván az, ha **(1)** mindketten konfrontálunk, ekkor ugyanis összecsattanunk. Ennél jobb, ha **(2)** elrántom a kormányt, miközben a másik nem rántja el. Ekkor ugyanis életben maradok, habár a másik győz. Ennél még jobb, ha **(3)** a másik is elrántja a kormányt, hiszen akkor legalább nem arat győzelmet felettem. A legjobb eset pedig az, ha **(4)** a másik elrántja a kormányt, miközben én nem rántom el, és így én leszek a győztős.”

1 \ 2	Bátor	Gyáva
Bátor	(0, 0)	(3, 1)
Gyáva	(1, 3)	(2, 2)

Stratégiák:

- dominánsok ?
- NE (B,Gy)(Gy,B)
- Pareto (Gy,Gy)
- Jóléti (B,Gy)(Gy,B)(Gy,Gy)
- kevert NE ((1/2,1/2), (1/2,1/2))

koordináció ??

Jellegzetes játéksémák

Nemek harca (Battle of sexes)

Képzeljünk el egy házaspárt. A férj inkább focimeccsre, míg a feleség inkább operába szeretne menni, viszont inkább lennének együtt, mintsem külön. Sajnos már nincs idejük egyeztetni – külön-külön kell dönteniük (jegyet váltani), hogy hová mennek: **focimeccsre**, vagy az **operába**. Mit tegyenek?

1 \ 2	Vers.	Koop.
Vers.	(1, 1)	(3, 2)
Koop.	(2, 3)	(0, 0)

Stratégiák:

- domináns ??
- NE (K,V)(V,K)
- Pareto (K,V)(V,K)
- Jóléti (K,V)(V,K)
- kevert NE ((3/4,1/4), (3/4,1/4))

koordináció ??

Jellegzetes játéksémák

Vezérürü (Leader)

Adott egy egyirányú út, és rajta egy kereszteződés, ahol két autós áll egymással szemben, és épp arra készül, hogy felhajtson az egyirányú útra. Így gondolkoznak: „Ha **(1)** mindketten elindulunk, akkor összeütközünk (ez a legrosszabb eset). Ennél azért egy fokkal jobb, ha **(2)** egyikünk sem indul el, bár úgy időtlen időkig ebben a kereszteződésben rostokolnánk... Ha azonban **(3)** én várnék, és a másik indulna előbb, úgy legalább előbb-utóbb feljutnék az útra. A legjobb persze az volna, ha **(4)** én indulnék előbb, és a másik megvár engem.”

1 \ 2	Megy	Vár
Megy	(0, 0)	(3, 2)
Vár	(2, 3)	(1, 1)

Stratégiák:

- domináns ??
- NE (V,M)(M,V)
- Pareto (V,M)(M,V)
- Jóléti (V,M)(M,V)
- kevert NE ((1/2,1/2), (1/2,1/2))

koordináció ??

Jellegzetes játéksémák

Forintpárosítás (Matching pennies)

Adott két játékos, mindketten rendelkeznek egy-egy forinttal. A forintjukat egymás elől elrejtve fejre, vagy írásra állítják, majd pedig a pénzeket egyszerre egymásnak felmutatják. Ha mindkét forint „paritása” azonos (azaz fej-fej, vagy írás-írás), akkor az egyik játékos nyer, mindkét érme az övé lesz, egyébként a másik nyer.

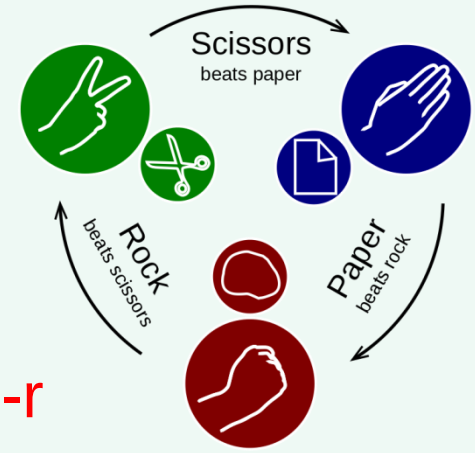
1 \ 2	Fej	Írás
Fej	(1, -1)	(-1, 1)
Írás	(-1, 1)	(1, -1)

Stratégiák:

- domináns ??
- (tiszta) NE ?
- Pareto (mindegyik?)
- Jóléti (mindegyik?)
- kevert NE ((1/2,1/2), (1/2,1/2))

Jellegzetes játéksémák

Kő-papír-olló (Rock-paper-scissors)



		r	p	1-p-r
	1 \ 2	**Kő**	**Papír**	**Olló**
q	**Kő**	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
z	**Papír**	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
1-q-z	**Olló**	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

By Enzoklop - Own work, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=27958688

(Christie (olló) vs. Sotheby (papír), 2005)

További kérdések, problémák …

NE koordináció

Korrelált, stabil, erős, … NE

Evolúciósan stabil stratégia

Stratégiák eloszlása populációban (reprodukcióval) változik. Stabil esetben nem támadható meg mutáns viselkedéssel.

Replikátor dinamika

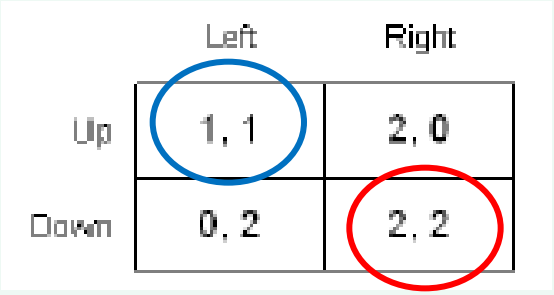
Remegő-kéz tökéletes NE

Játékos „remegve” esetleg nem szándékolt stratégiát választ, de elhanyagolható valószínűséggel.

Epsilon-NE

Bayes-i hiányos információjú játékok (Bayes-frissítéssel)

Véletlen változó (egy “külső” esemény) közismert pdf-fel és minden játékos privát jelzése a változó aktuális értékéről. Ehhez igazódik a stratégia megválasztása (lépjél A-t, ha z=1, lépjél B-t, ha z=0). Standard játék ennek degenerált, probabilisztikusan független esete.



NE értékelés: NP nehéz (NE adott jóléttel, stratégiával, ágenshaszon optimálizáló, egyértelmű, …)

N-ágenses játékok

…

További kérdések, problémák …

“Irracionális” stratégiák

- Következtetés korlátjai
- NE számítása pontatlan
- NE számítása nem ismert
- NE fogalma ismeretlen
- rejtett hasznosságok
- más fontosabb, mint a győzelem:
  segítőkész akar lenni, kíváncsi, belezavar, …

Ágens/opponens modellezés

- NE legjobb, *ha mások is ezt használják*
- Sok esetben más ágensek nem az NE-t használják:
  - ha a cselekvéseket pontosan becsülhetik, más stratégiával esetleg jobban járnak.
  - ha megkísérelnek megjósolni az opponens csekvéseit

A valóság jobb modellezése – ismételt játékok

Iterált fogoly dilemma

(a) véges látóhatár (elvi elemzés)

utolsó kör (Vall, Vall)
de akkor az utolsó előttiben sem érdemes kooperálni
utolsó előtti kör (Vall, Vall)
…
első kör (Vall, Vall) (hátráló indukció)

(b) kis valószínűséggel a folyó kör az utolsó

együttműködő (Tagad, Tagad) egyensúly

(**Össznépi tétel**) (**Folk theorem**)
Ismételt játékokban bármely stratégia, ami nem Pareto-dominált és ahol mindegyik játékos a maxmin hasznosságánál több hasznot kap, egy elfogadható egyensúlyi stratégia.

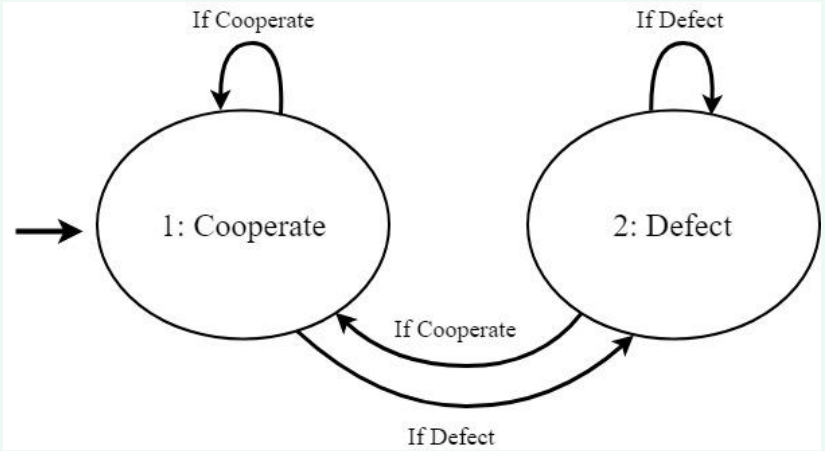
A valóság jobb modellezése – ismételt játékok

Iterált fogoly dilemma

Robert Axelrod első kísérletei

1979 (15 program)
1982 (62 program)

Mindkettőt **Anatol Rapoport** nyeri a **Tit-For-Tat** (**TFT**) stratégiával

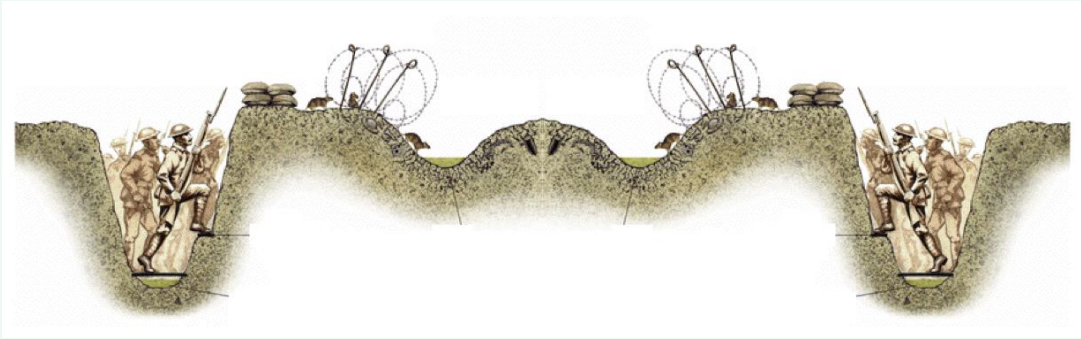


Nem hagyja magát, megtorló
Nem haragtartó
Alapvetően együttműködő
Gyorsan reagáló
…
(hatékonyan kiismerhető)

1. S(1) = Coop
k. S(k) = Az ellenség stratégiája (k-1)

A valóság jobb modellezése – ismételt játékok

Iterált fogoly dilemma



Valós történelmi példa (Axelrod könyve nyomán)
- WWI – lövészárok hadviselés
- Ígény együttműködésre:
  ha megtámadjuk őket, visszavágnak, és pórul járhatunk.
  ha nem fogunk támadni, esetleg ők sem.
- Az együttműködés kialakulása. A két, elvben ellenséges gyalogság kerülte az összecsapás

- Story from a British army officer in World War I:
  - I was having tea with A Company when we heard a lot of shouting and went out to investigate. We found our men and the Germans standing on their respective parapets. **Suddenly a salvo arrived but did no damage.** Naturally both sides got down and our men started swearing at the Germans, when all at once **a brave German got onto his parapet and shouted out: "We are very sorry about that; we hope no one was hurt. It is not our fault. It is that damned Prussian artillery."**
- The salvo wasn't the German infantry's intention
  - They didn't expect it nor desire it

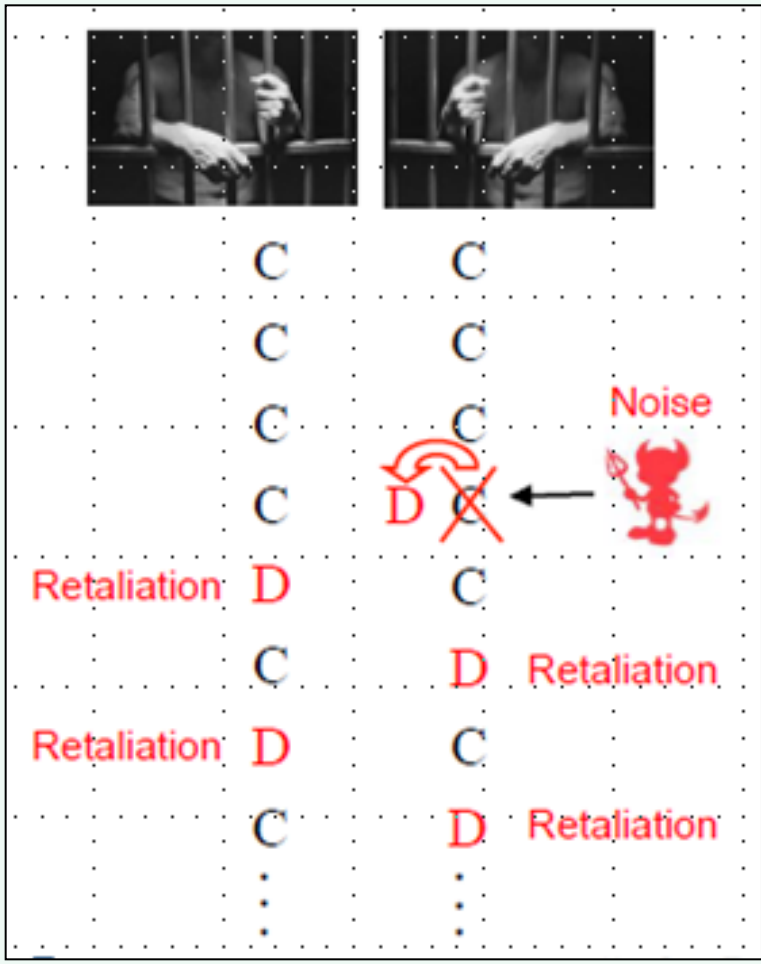
A valóság jobb modellezése – ismételt játékok

Iterált fogoly dilemma és a zaj

Zérusnál nagyobb valószínűség, hogy:
Tagad (Cooperate (C))-ból Vall (Defect (D)) lesz, stb.

- Balesetek modellezése (hasznosság számítása módosított cselekvés alapján).
- Félreértés/csalás modellezése (hasznosság számítása eredeti cselekvés alapján).

Zajos FD stratégiák:
TFTT – Tit For Two Tats
GTFT – Generous TFT (véletlen módon elnéző)
Pavlov – repeat (ha nagyjából nyer néhány utóbbi lépésben, invert (ha inkább veszít)
…



A valóság jobb modellezése – ismételt játékok

Iterált fogoly dilemma és a zaj – Verseny 20-ik évfordulója, zajjal

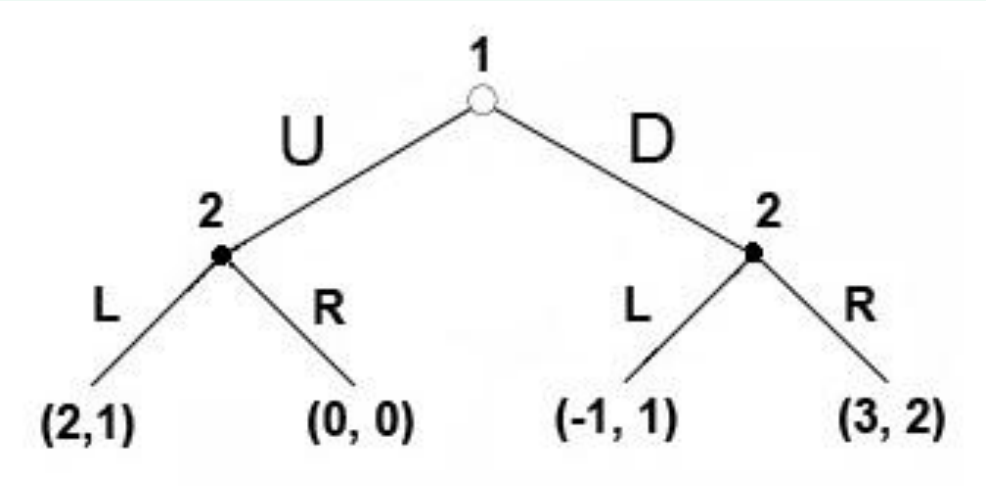
165 program

DBS ágens:
zaj modellek, modellverifikálás megfigyelés alapján, modell újraszámítása,
első 10 helyezet dominálása

Master-Slave stratégia:
1 Master, 19 Slave
Felismerik egymást
Ha Slave Master-rel játszik
Slave (C), Master (D) --- Master max
Ha Slave idegennel játszik,
akkor (D) --- idegen min.

Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

(Racionális) játékosak véges halmaza (n)
Játékfa (csúcsok – játékosok, élek – stratégiák címkékkel)
Minden levélben a fizetések n-ese, minden játékosnak egy haszonérték
Közbülső csúcsok – döntési csúcsok
Élek – stratégiák



Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

Tökéletes információjú játékok

a játék felépítése – a közös tudás (common knowledge)
reprezentációs eszköz: szingleton csúcsú játékfa

Nem-tökéletes információjú játékok

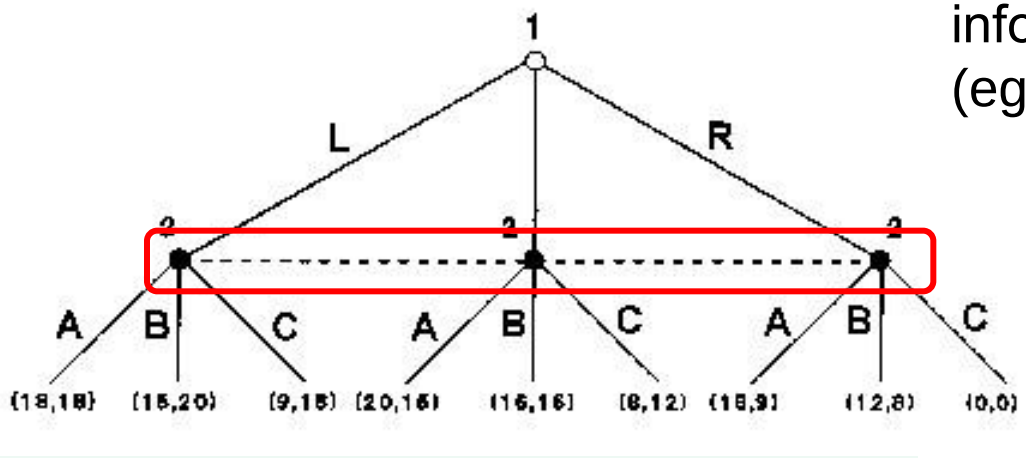
játékosok tudása más játékosokról teljes (kik azok, mik a stratégiáik, milyenek a haszonfüggvényeik), csak a konkrétan lépett stratégiájukról a tudása részleges ,
reprezentációs eszköz: több csúcsot befogó **információs halmazok**

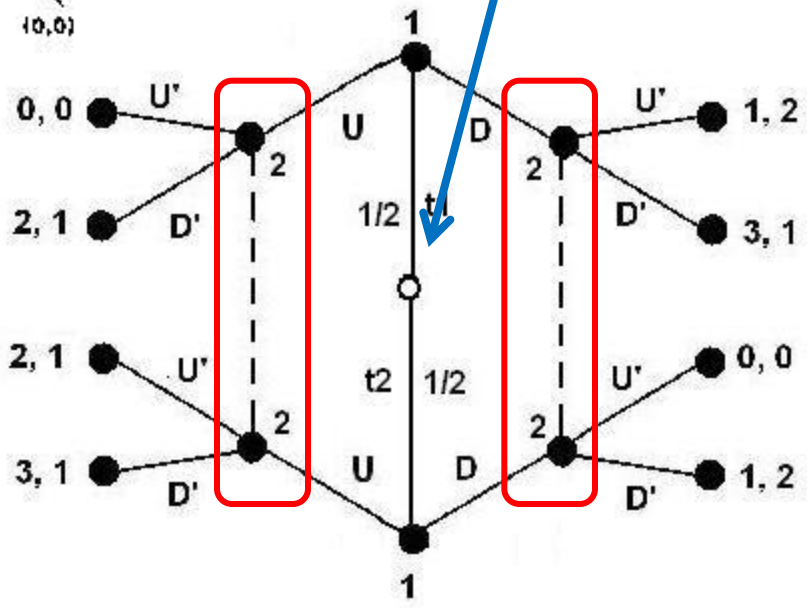
Nem teljes információjú játékok

játékosok tudása más játékosokról nem teljes (viselkedési tipusuk, stratégiáik, haszonfüggvényeik, stb.),
reprezentációs eszköz: véletlen hatása **Természet játékos**sal és valószínűségi eloszlásával
(un. Harsányi transzformáció)

Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

Opcionálisan
egy fiktív játékos – a Természet
információs csúcshalmazok
(egy-egy játékos számára)

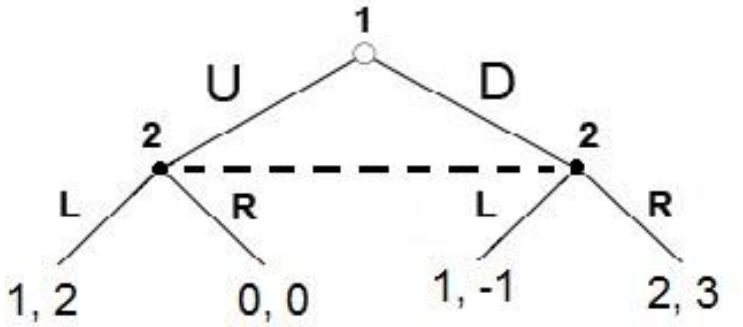


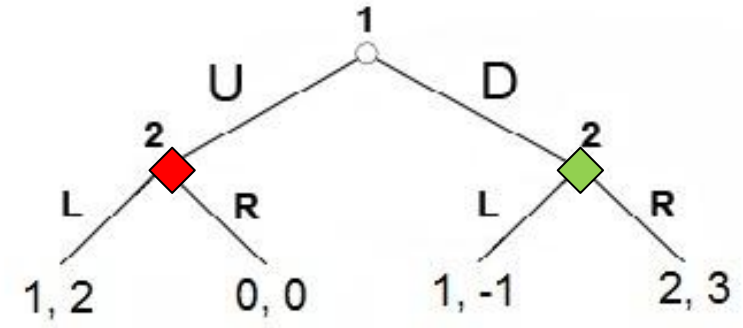


Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

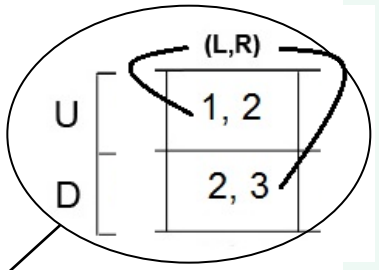
Ekvivalens megadás normál (stratégiai) alakban

Extenzív forma információ többlete(!) – stratégia minden információs halmazban, ahol cselekvési lehetősége van.





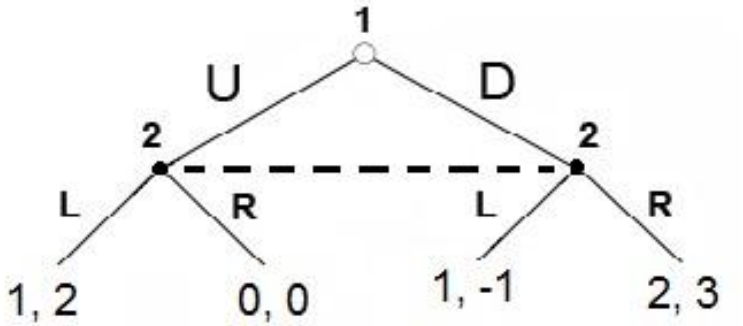
	L	R
U	1, 2	0, 0
D	1, -1	2, 3



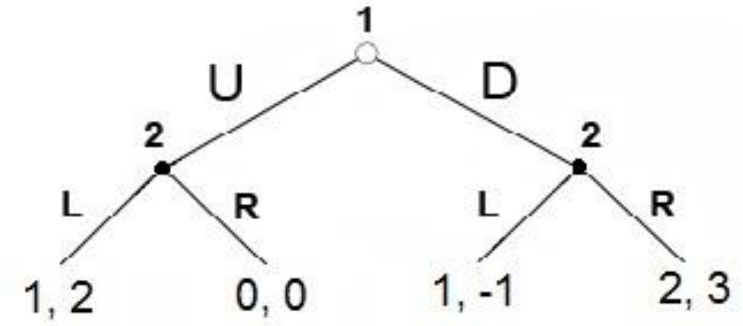
	(L,L)	(L,R)	(R,L)	(R,R)
U	1, 2	1, 2	0, 0	0, 0
D	1, -1	2, 3	1, -1	2, 3

Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

Egyensúlyok és …



	L	R
U	1, 2	0, 0
D	1, -1	2, 3



	(L,L)	(L,R)	(R,L)	(R,R)
U	1, 2	1, 2	0, 0	0, 0
D	1, -1	2, 3	1, -1	2, 3

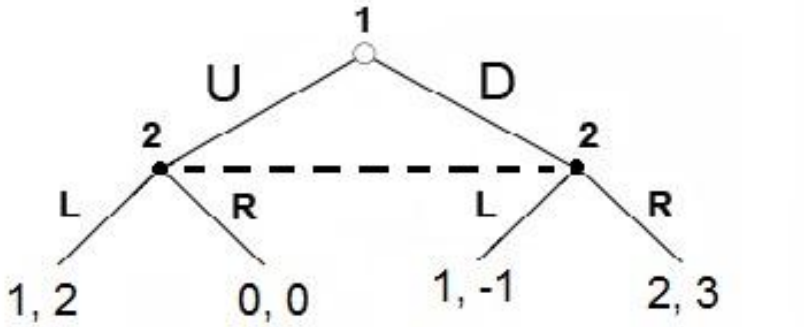
Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

Hiteles, **hiteltelen** fenyegetés

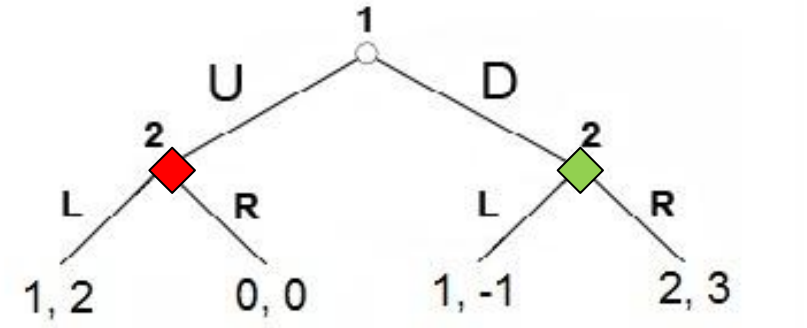
(U,(L,L)), (D,(L,R)), (D, (R,R)) Nash-egyensúlyok nem egyformán „komolyak”:
Ha a 2. játékos eléri a jobb információs halmazt, R-t kell játszania.
Ha a 2. játékos eléri a bal információs halmazt, L-t kell játszania.
A közös tudás miatt ez az 1. játékosnak ismert (várható), így neki D-t kell választania.
A 3-ik NE nem „hiteles”, alapa a 2. játékos „üres” fenyegetése, amit életbe bevezetni nem akar.

Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

Egyensúlyok és hiteles és hiteltelen fenyegetések



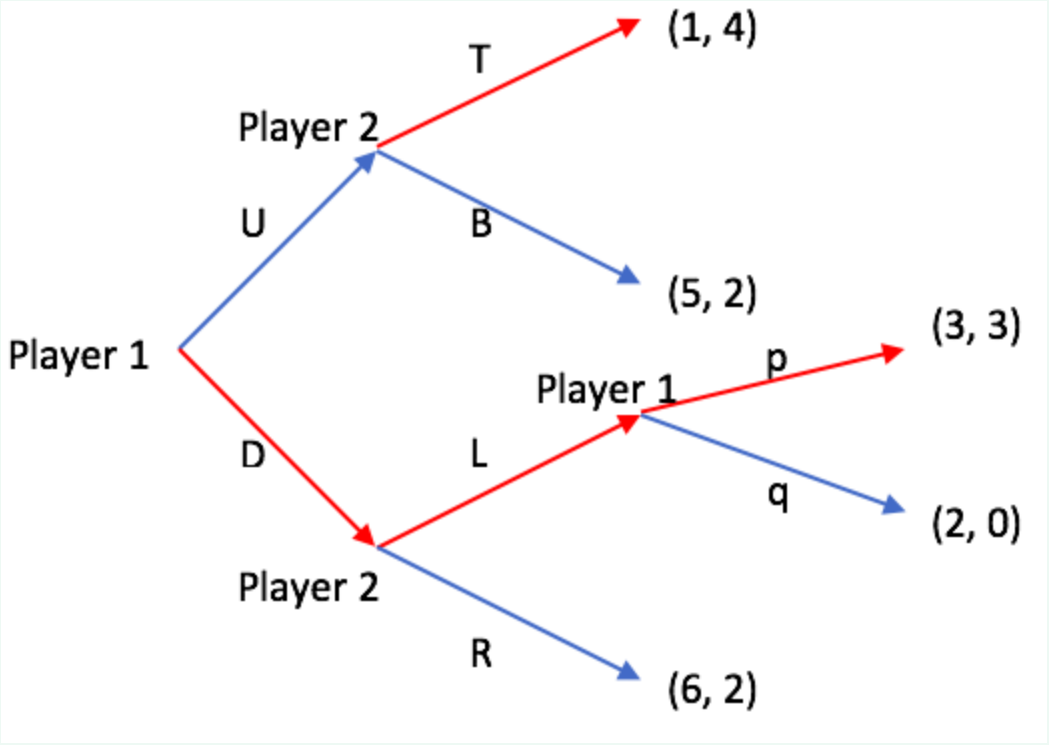
	L	R
U	1, 2	0, 0
D	1, -1	2, 3



	(L,L)	(L,R)	(R,L)	(R,R)
U	1, 2	1, 2	0, 0	0, 0
D	1, -1	2, 3	1, -1	2, 3

Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

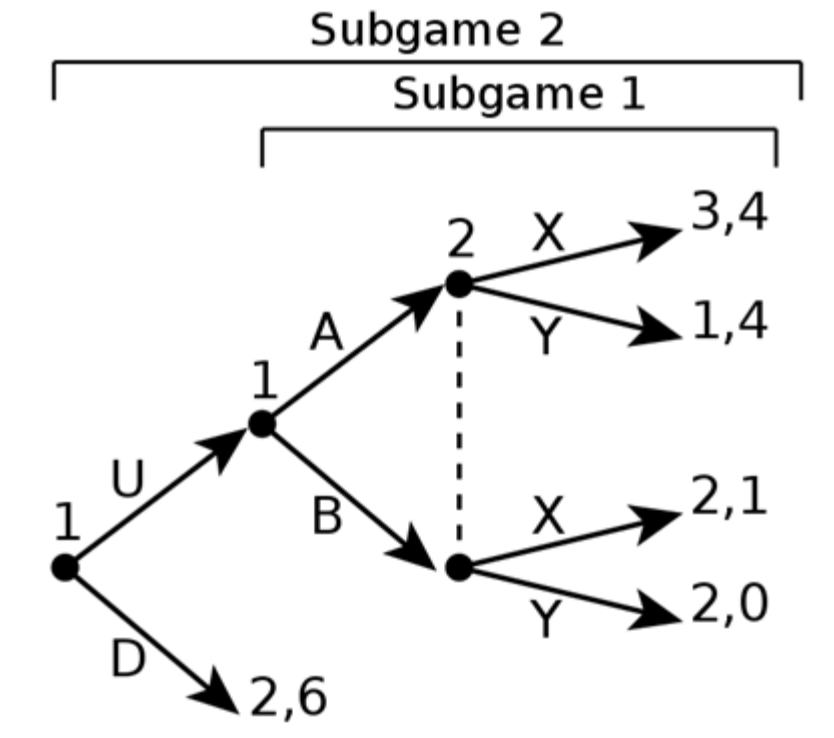
Hátráló indukció (Zermelo, 1913): lényegében maxmin keresés kétszemélyes játékokban (MI).
Minden teljes információjú extenzív formájú játéknak van NE egyensúlya tiszta stratégiák körében, amit hátráló indukcióval ki lehet számítani. (de: hátráló indukció paradoxonja)

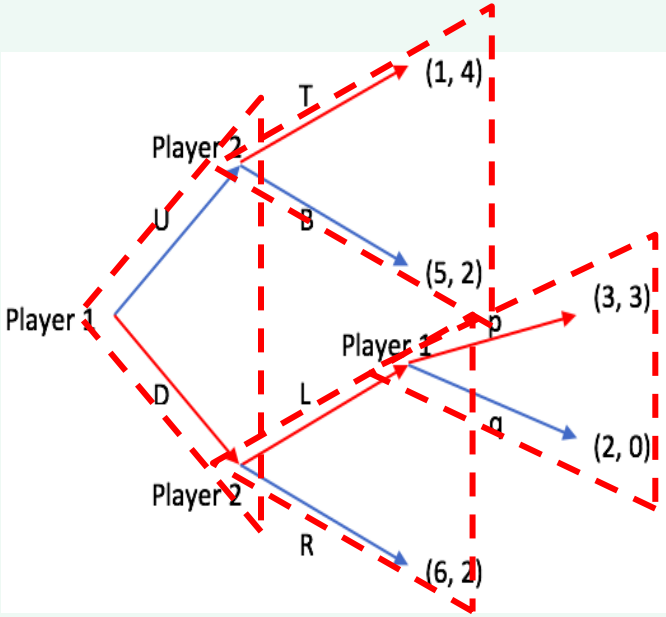


pq – részjáték, L haszna (3,3)
LR – részjáték, D haszna (3,3)
TB – részjáték, U haszna (1,4)
UD – részjáték,
játék egyensúlya:
(Dp, TL) = (3,3)

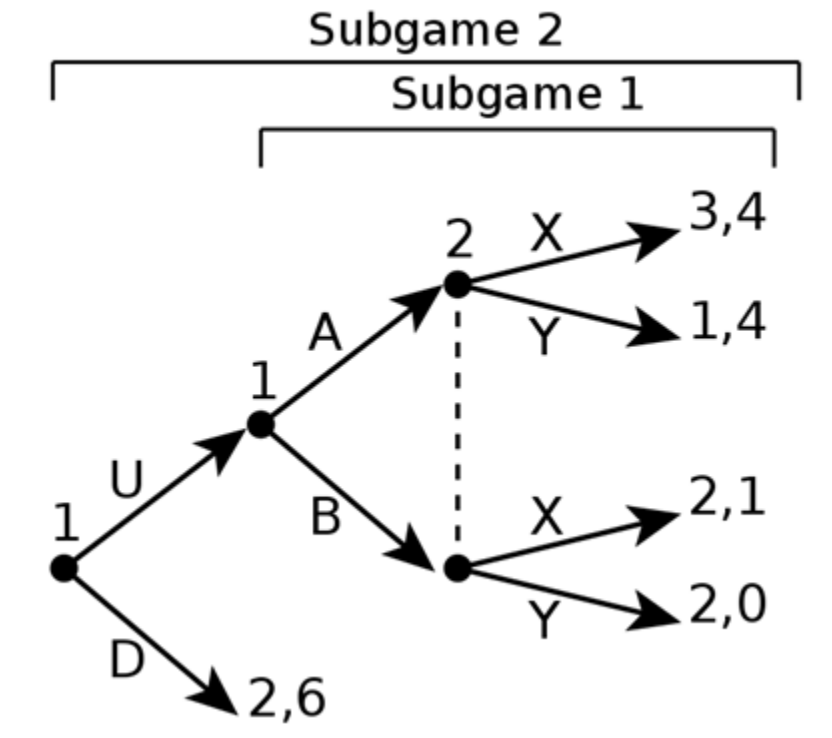
Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában

Részjáték-perfekt egyensúly (RJPE) – NE hátráló terjesztése. Perfekt információjú játékban mindig van tiszta részjáték-perfekt egyensúly. RJPE olyan NE, ami minden részjáték NE-ja.
Részjáték: minden csomóponttól a levelek felé úgy, hogy minden információs halmaz csomópontja a kiinduló csomópont gyereke.





Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában



Részjáték NE: **(A, X)**

1 \ 2	X	Y
A	3,4	1,4
B	2,1	2,0

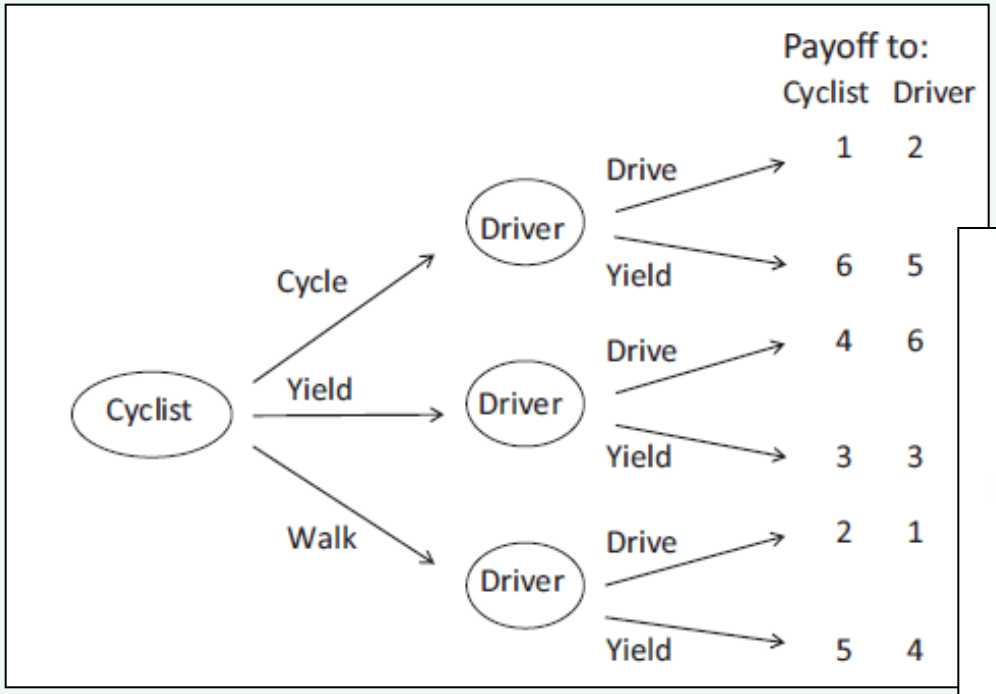
Játék NE:
(UA, X)
(DA, Y)
(DB, Y)

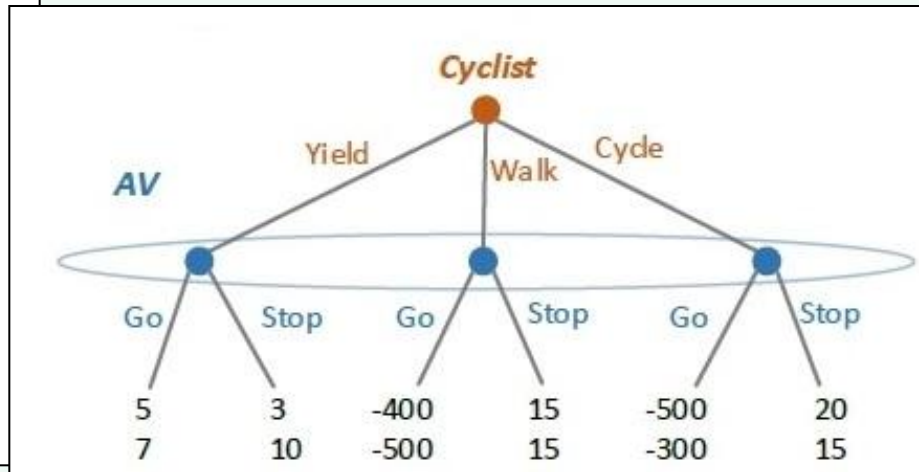
1 \ 2	X	Y
UA	3,4	1,4
UB	2,1	2,0
DA	2,6	2,6
DB	2,6	2,6

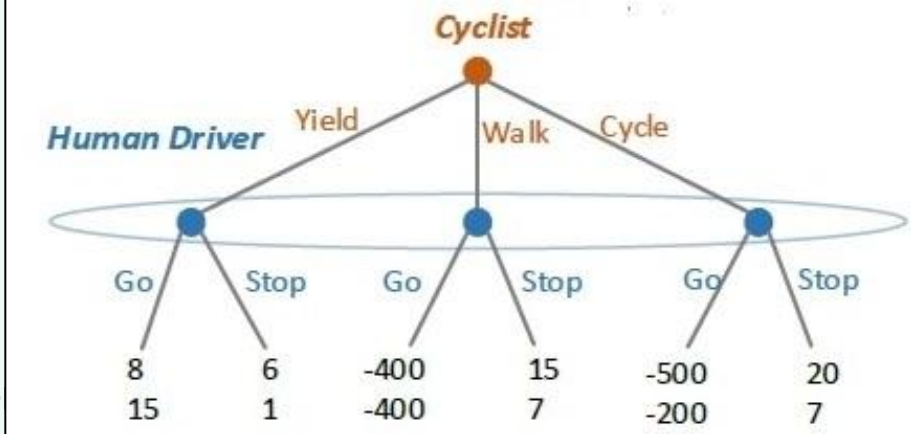
(UA, X) RJPE, mert **(A,X)** NE is a része
(DA, Y) nem … nem része
(DB, Y) nem …. nem része

https://en.wikipedia.org/wiki/Subgame_perfect_equilibrium

Dinamikus (szekvenciális) játékok extenzív formában



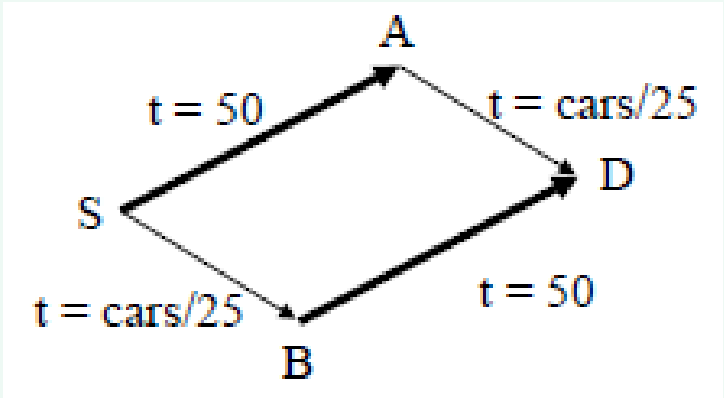


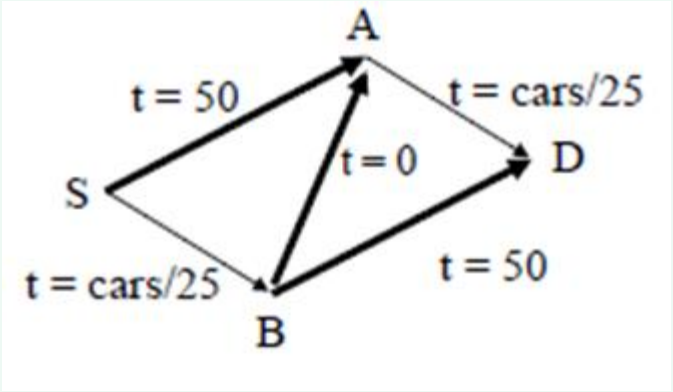


Úthálózatok, N-ágenses játékok

- 1000 jármű: S (start) → D (destination)
- 2 pálya: S→A→D and S→B→D
- S→A és B→D utak hosszúak, szélesek, t = 50 perc, járműszámtól függetlenül
- S→B és A→D utak rövidek és keskenyek, t = jm.szám/25

NE: 500 jm. A-n keresztül, 500 jm. B-n keresztül.
Mindenki ideje 50 + 500/25 = 70 perc
Ha csak egyetlen egy jármű cserél utat, 501 jármű miatt a haladási ideje megnő.





Braess Paradoxon
Adjunk hozzá új utat B-től A-ig, ami olyan széles és rövid, hogy 0 rajta az utazási idő.
Az új NE:
- Minden 1000 jármű S→B→A→D úton
- fog haladni, 1000/25 + 1000/25 = 80 perc idővel.

Egyensúly, mert ha valaki S→A→D úton megy, ideje 50 + 40 = 90 perc. Ha S→B→D úton, ideje 40 + 50 = 90 perc. Mindegyiket dominál az S→B→A→D útszakasz.
Ez az **egyetlen NE**.