Beágyazott információs rendszerek

5. Mennyiségek, változók valós idejű rendszerekben

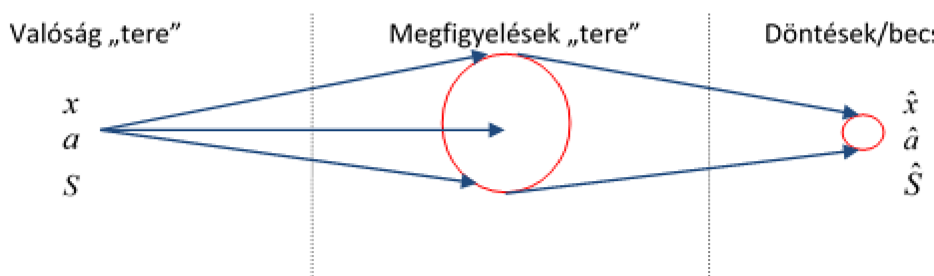
2020. október 21.

5. Mennyiségek, változók valós idejű rendszerekben

Előzmények: Real-time változó, real-time változó képe, időbeni pontosság, periodikus frissítés, megfigyelés: állapotmegfigyelés, eseménymegfigyelés, valós idejű objektum, állandóság, akciókésleltetés, idempotencia, hihetőség (bizánci típusú hibák), befolyásolhatóság, …

A befogadó környezet modellezése:

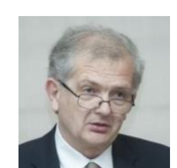
Ami nem megkerülhető: A befogadó környezet **megismerése**, majd a működtető **szoftverbe építése!** **Ennek eszköze a mérési eljárás:** a megismerési folyamat része, amelynek során a rendelkezésünkre álló ismereteinket pontosítjuk, ill. bővítjük.

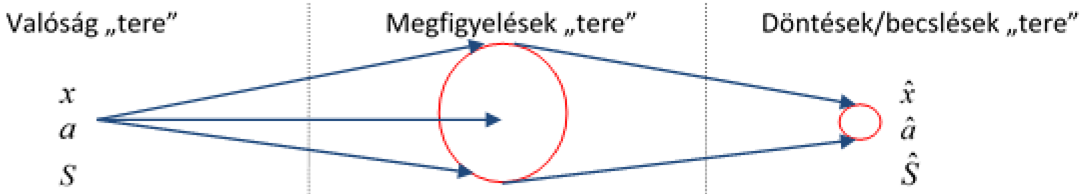


Az ábra a folyamat interpretálását segíti. A mérés során a **valóság** jelenségeit szeretnénk **megragadni**.
Ezt a „megragadást” előszeretettel végezzük olyan jellemzőkre építve, amelyek valamilyen értelemben **stabilitást** mutatnak.
Ilyen jellemzőkhöz (is) **absztrakció** révén jutunk.

- az állapotváltozók ($\boldsymbol{x}$), amelyek változásai a kölcsönhatások révén fellépő energia-folyamatokhoz köthetők (feszültség, nyomás, hőmérséklet, sebesség, stb.)
- a paraméterek ($\boldsymbol{a}$), amelyek a kölcsönhatások intenzitásviszonyait ragadják meg, és
- a struktúrák ($\boldsymbol{S}$), amelyek a rendszer-komponensek kapcsolatait írják le.

A valóság „tere” egy olyan absztrakció, amelyben a vizsgált jellemzők konkrét értékei a tér egy pontjának felelnek meg.





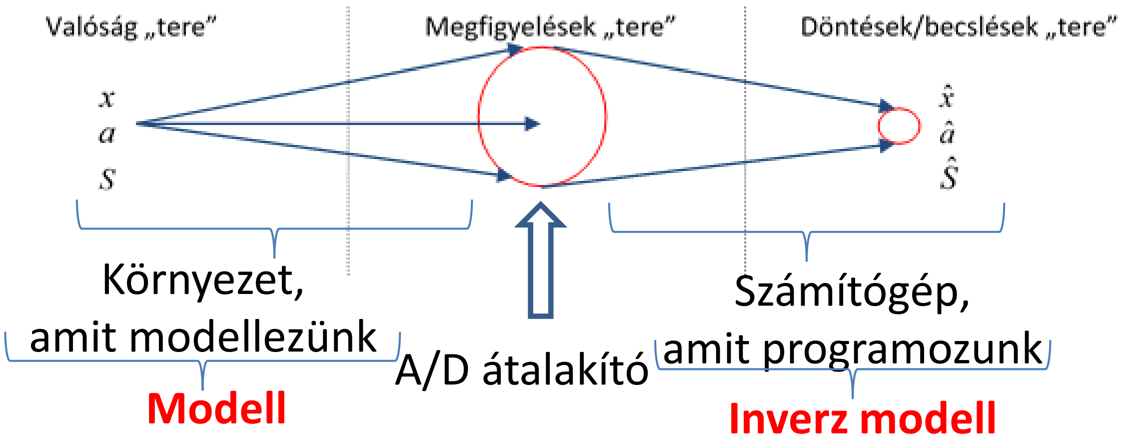
A mérés előtt a pont koordinátáit **nem ismerjük**.

A mérések során egy-egy ilyen pont koordinátáinak meghatározására (megmérésére) törekszünk, ami – ismert módon – **csak közelítőleg** lehetséges (a mérés hibával terhelt).

További nehézség, hogy a **mérendő mennyiséghez** sok esetben nem férünk közvetlenül hozzá, ezért többnyire csak valamilyen leképzéséből tudunk kiindulni.

Ezt a leképzést nevezzük **megfigyelés**nek.

A mérendő és a megfigyelt érték közötti út a **mérési/jelátviteli csatorna**.



Megfigyelés determinisztikus csatorna esetén:

A megfigyelt “valóságot” autonóm rendszerként képzeljük el, és diszkrét modellel írjuk le.

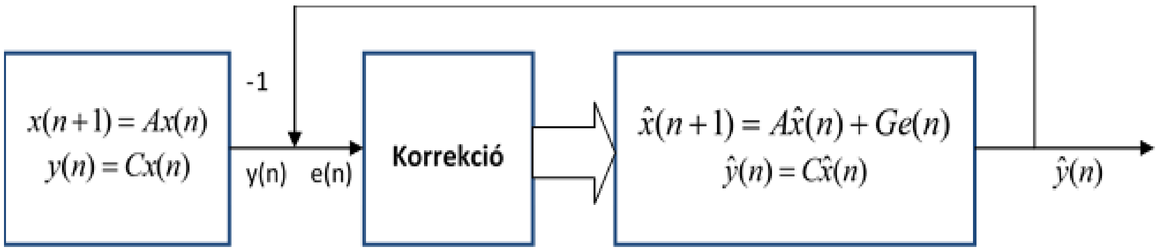
A „valóságot” és a megfigyelést leíró állapot, ill. megfigyelési egyenletek:

$\boxed{x(n+1) = Ax(n),}$ $\quad dim[x(n)] = N, \quad dim[A] = N * N$

$\boxed{y(n) = Cx(n)}$ $\quad dim[y(n)] = M, \quad M \leq N, \; dim[C] = M * N$

Tudunk egy ilyen modellt invertálni? **Általában nem!** Mikor tudunk? $\boxed{\text{Ha } C^{-1} \text{ létezik!}}$

Ha **nem létezik C^{-1}**, akkor mást kell csinálni! A megoldás egy **szimulátor!**
Ehhez a modellnek **be kell épülnie** a számítógépbe! Ezt vezéreljük a **megfigyelt értékekkel**!



Célunk az $x(n)$ állapotvektor becslése.

Ennek az eszköznek a neve: **megfigyelő**, amely a „valóság” **másolata** igyekszik lenni azáltal, hogy egy korrekciós/tanuló/adaptáló mechanizmus eredményeképpen **követi** azt.

A követés bekövetkeztével a mérés „eredménye” $\hat{x}(n)$ a megfigyelőből olvasható ki.

A megfigyelőben megvalósuló „**másolat**” állapot, ill. megfigyelési egyenletei:

$$\boxed{\hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + Ge(n)}$$

G: **korrekciós mátrix**; $dim[G] = N * M$, $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$

$$\boxed{\hat{y}(n) = C\hat{x}(n)}$$

A G mátrixot úgy tervezzük meg, hogy $\boxed{\hat{x}(n) \rightarrow x(n)}$.

A minimalizálandó állapothiba az állapotegyenletek különbségeként:

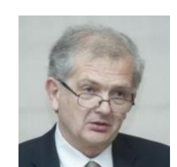
$$\underbrace{x(n+1) - \hat{x}(n+1)}_{\varepsilon(n+1)} = Ax(n) - A\hat{x}(n) - Ge(n) = \underbrace{(A - GC)}_{F}\underbrace{(x(n) - \hat{x}(n))}_{\varepsilon(n)}.$$

$$\boxed{\varepsilon(n+1) = F\varepsilon(n)}$$

az ún. hibarendszer állapotátmenet mátrixa.

A G mátrix tervezése: $\boxed{\varepsilon(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,}$ aminek érdekében $\varepsilon(n+1) < \varepsilon(n)$, lehetőleg $\forall$ n-re.

F csökkenti $\varepsilon(n)$ hosszát minden lépésben: „**kontraktív**”. Az $\varepsilon(n)$ hibavektorral kapcsolatos egyenlőtlenség a vektor hosszára (normájára) értelmezendő, skalár esetben pedig a hiba abszolút értékére. **Elvárás:** a hibarendszer a belső energiáját **disszipálja.**



Esetek:

1. $F = A - GC = 0$. Ebben az esetben $G = AC^{-1}$. Ez akkor lehetséges, ha C négyzetes, azaz a megfigyelés éppen annyi komponensű, mint maga az állapotvektor.

Az egyenlet explicit formában megoldható! A konvergencia egyetlen lépéses!

2. $F^N = (A - GC)^N = 0$. Ebben az esetben a hibarendszer N lépésben konvergál:

$$\boxed{x(N) - \hat{x}(N) = (A - GC)^N(x(0) - \hat{x}(0)) = 0}$$

Az $F^N = 0$ tulajdonságú mátrixok, az ún. **nemderogatórius nilpotens** mátrixok, amelyek sajátja, hogy **valamennyi sajátértékük nulla**. Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek **véges impulzusválaszúak** (ún. ***FIR*** rendszerek), hiszen a kezdeti hiba **véges lépésben** eltűnik.

3. Ha $F^N = (A - GC)^N \neq 0$, akkor a stabilra tervezett hibarendszer állapotvektorának hossza **exponenciális jelleggel** fog csökkenni. Egy ilyen hibarendszer akkor lesz **stabil**, ha összes **sajátértéke** az egységsugarú körön **belül** helyezkedik el. Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek **végtelen impulzusválaszúak** (ún. ***IIR*** rendszerek), mert a kezdeti hiba csak **végtelen lépésben** tűnik el.

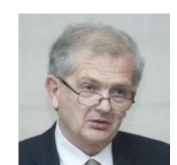
Megfigyelés zajos csatorna esetén: Ebben az esetben nem $\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ az elvárásunk, hanem az, hogy $trace\{E[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} min$ legyen.

$$\varepsilon(n) = \begin{bmatrix} \varepsilon_0(n) \\ \varepsilon_1(n) \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1}(n) \end{bmatrix}$$

ezért $trace\{E[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)]\} = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2(n)$. $\boxed{\varepsilon(n+1) = F\varepsilon(n)}$ helyett

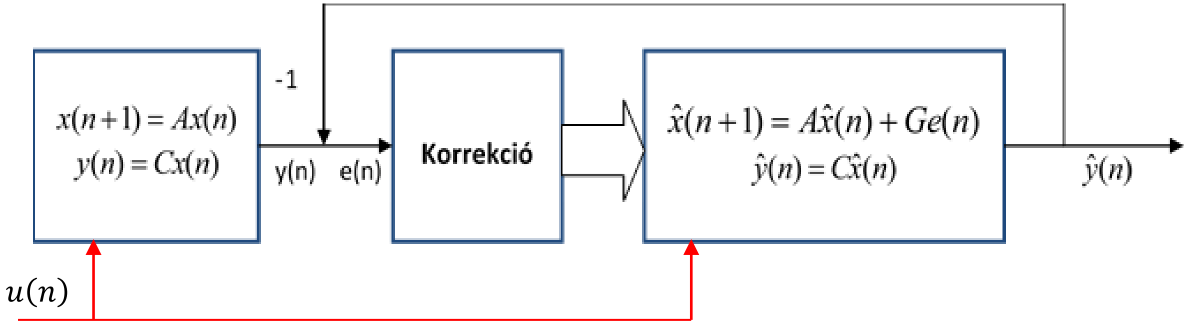
$$\boxed{E[\varepsilon(n+1)\varepsilon^T(n+1)] = FE[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)]F^T}$$

hibarendszer jellemzést használunk.



Ez a $\boxed{P = E[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)]}$ hiba-mátrix központi szerepet kap a híres Kalman prediktor, ill. szűrő esetében. **Megjegyzések:**

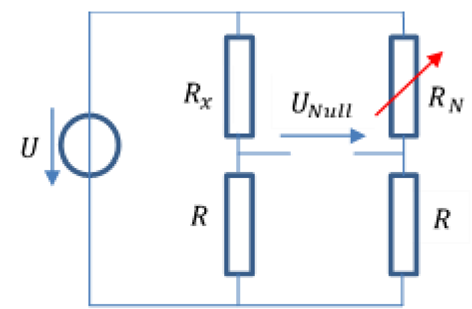
1. A megfigyelő elrendezés mindkét modellje „gerjeszthető” egy közös gerjesztéssel.



Mivel a modellek lineárisak, a **szuperpozíció** értelmében a megfigyelő konvergenciája változatlanul megvalósul.

2. Az ábra szerinti megfigyelőt **Luenberger megfigyelő**nek nevezzük. Luenberger szerint **majdnem minden rendszer** megfigyelő. A megfigyelő tulajdonság feltétele, hogy a megfigyelő legyen „gyorsabb”, mint a megfigyelt rendszer, különben nem képes követni a változásokat.

3. Egy ellenállás- vagy impedancia-mérő híd ismeretlen elemet tartalmazó hídága a valóság **fizikai modellje**, a kiegyenlítő elemet tartalmazó ága pedig a megfigyelőben felépülő, **beállítható/hangolható modell**.



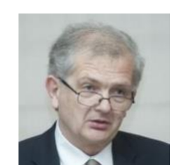
A hídágak osztópontján megjelenő feszültségek különbsége vezérli a hangolást, és a végén a két feszültség megegyezik, a beállítható elemről leolvasott érték segítségével meghatározható az ismeretlen. Ez az áramkör, a hangolást végző operátor részvételével megvalósítja a megfigyelőt.

Példa:

Adott $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hogyan állítsuk be G-t?

$$\boxed{G = AC^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$



Példa: Adott $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hogyan állítsuk be G-t? $\boxed{G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = ?}$

$GC = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & g_0 \\ g_1 & g_1 \end{bmatrix}$, $[A - GC] = \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - 1g_1 \end{bmatrix}$, $[A - GC]^2 = 0$ alapján.

$$\begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2g_0 + g_0^2 + g_0 g_1 & -g_0 + g_0^2 + g_0 + g_0 g_1 \\ -g_1 + g_1^2 + g_1 + g_0 g_1 & 1 + 2g_1 + g_1^2 + g_0 g_1 \end{bmatrix} =$$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ A mellékátló kifejezéseit a főátló kifejezéseibe behelyettesítve kapjuk:

$\boxed{1 - 2g_0 = 0,}$ $\boxed{1 + 2g_1 = 0,}$ amiből: $g_0 = 0.5$ és $g_1 = -0.5$.

Ellenőrzésképpen: $\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Példa: Határozzuk meg $[A - GC]$ sajátértékeit erre az esetre: $det[\lambda I - A + GC] = 0$

$$det \begin{bmatrix} \lambda - 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & \lambda + 0.5 \end{bmatrix} = (\lambda - 0.5)(\lambda + 0.5) + 0.25 = \lambda^2 - 0.25 + 0.25 = 0.$$

Mindkét sajátérték nulla.

Megjegyzések:

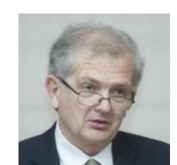
1. Ez a tulajdonság **általánosan igaz** véges lépésben konvergálni képes rendszerek esetében.
2. Az ilyen rendszerek átviteli függvénye olyan (elfajuló) racionális törtfüggvény, amelynek **valamennyi pólusa az origóban** van:

$$H(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N} = \frac{a_N + a_{N-1} z + a_{N-2} z^2 + \ldots + a_1 z^{N-1}}{z^N}$$

Ezek az ún. **véges impulzusválaszú** (*FIR*) szűrők.

Időtartománybeli megfelelője: $y(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_N x(n-N)$,

ahol a valós idejű **kiszámíthatóság** miatt csak $x(n)$ korábbi mintái szerepelhetnek.



Példa: A sajátértékekre vonatkozó feltétel felhasználható a $g_0$és a $g_1$értékek meghatározására:

$$det[\lambda I - A + GC] = 0, \;\; det\begin{bmatrix} \lambda - 1 + g_0 & g_0 \\ g_1 & \lambda + 1 + g_1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda(g_0 + g_1) + g_0 - g_1 - 1 =$$

$= \lambda^2 = 0.$ Ebből: $g_0 + g_1 = 0,$ ill. $g_0 - g_1 = 1,$ amiből: $g_0 = 0.5$ és $g_1 = -0.5.$

Van, hogy a befogadó környezet „dinamikáját” közvetlenül nem ismerjük:
Az állapotegyenlet nem ismert vagy $\boxed{A = I.}$ Ekkor csak megfigyeléseink vannak.

Legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslők: Nincs előzetes ismeretünk sem a mérendő paraméterről, sem a csatorna karakterisztikáról (a zajról).